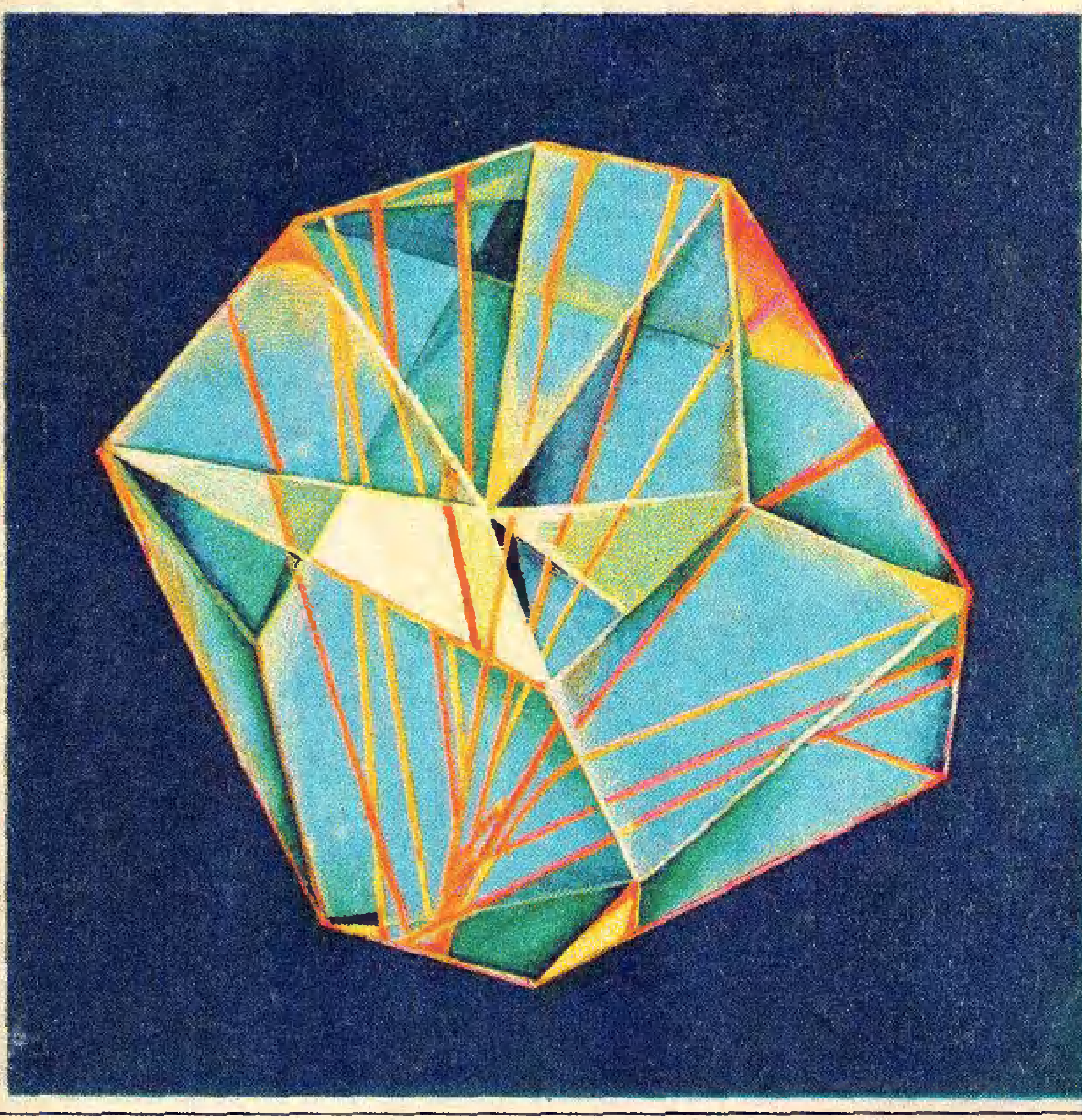
Квант

Научно-популярный физико-математический

3

1971

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



В номере:

Экономика и линейные неравенства

А. Б. Каток

В настоящее время математика находит все большее применение в экономике. Существует ряд математических методов, помогающих решать экономические задачи. В этой статье мы расскажем вам об одном из таких методов — методе линейного программирования.

Трудно найти человека, который бы не слышал о том, что в последнее время математические методы много и успешно используются при решении экономических задач.

Менее известно, что математическая экономика имеет довольно почтенный возраст. Она возникла около полутора столетий назад, но долгое время не привлекала к себе особенного внимания. К концу прошлого века было опубликовано лишь несколько десятков работ по математической экономике. В настоящее время в различных странах ежегодно выпускаются тысячи книг и статей на эту тему. В чем причина такого резкого роста популярности математической экономики? Очень упрощенно, она состоит в том, что раньше математику пытались использовать только для описания экономических явлений (а такие вопросы волнуют обычно лишь узкий круг специалистов), а теперь математика используется также для выяснения того, как лучше организовать тот или иной производственный процесс. Впервые задача такого рода была рассмотрена в 1939 году советским математиком академиком Л. В. Канторовичем в связи со следующим практическим вопросом, поставленным работниками Ленинградского фанерного треста.

Один из заводов этого треста выпускал пять видов изделий. В плане было указано, какой процент в общем выпуске должны составлять изделия каждого вида. Завод имел восемь станков, каждый из которых мог изготовлять любой из пяти видов изделий с известной производительностью. Требовалось распределить работу между станками так, чтобы выпуск продукции был наибольшим.

При решении этой задачи Л. В. Канторович разработал метод, названный методом линейного программирования. Этот метод оказался полезен, так как многие экономические задачи, казалось бы не связанные между собой, будучи переформулированы на языке математики, оказываются похожими на эту задачу и решаются аналогичными методами.

Задача «фанерного треста» довольно сложна, и потому для уяснения идей, лежащих в основе метода линейного программирования, приведем несколько более простых задач.

1. З а д а ч а о в е л о с и п е д а х. На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так,

что вместо двух дорожных велосипедов завод может выпустить один гоночный, причем гоночный велосипед приносит в 1,5 раза больше прибыли. Завод может произвести 700 дорожных велосипедов в день, однако склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько нужно выпускать в день гоночных и сколько дорожных велосипедов для того, чтобы завод получал максимальную прибыль?

2. Задача о карьерах. В пунктах A и B расположены кирпичные заводы, а в пуктах C и D — карьеры, снабжающие их песком. Потребность заводов в песке не больше производительности карьеров. Известно, сколько песка нужно каждому из заводов и сколько его добывают в каждом из карьеров. Кроме того, известно, сколько стоит перевозка тонны песка из каждого карьера до заводов. Нужно организовать снабжение заводов песком так, чтобы затраты были наименьшими. (Подобные задачи называются транспортными.)

3. Задача о корме для цыплят. Птицеферма занимается откармливанием цыплят. Предположим для простоты, что кормом могут служить два продукта — пшеница и горох. Для того чтобы цыпленок нормально рос, его ежедневный рацион должен содержать не меньше определенного количества калорий, а также белков, жиров и углеводов. Эти количества устанавливаются специалистами по птицеводству, и мы их должны рассматривать как заданные. Пусть известно, сколько калорий, белков, жиров и углеводов содержится в одном грамме пшеницы и в одном грамме гороха, известна также цена каждого вида корма. Как составить наиболее дешевый, но полноценный рацион?

В каждой из приведенных задач нужно произвести оптимальный выбор, хотя в каждой задаче он понимается по-разному.

Для того чтобы увидеть, какие математические вопросы возникают при решении таких задач, разберем подробно задачу о корме для цыплят.

Для анализа этой задачи вполне достаточно тех сведений, которые входят в школьный курс, а все вычисления можно без труда провести, пользуясь карандашом и бумагой.

Пусть в одном грамме пшеницы содержится a_1 калорий, в одном грамме гороха — b_1 калорий, а минимальное необходимое число калорий в дневном рационе равно c_1. Будем изображать меню, содержащее x граммов пшеницы и y граммов гороха, точкой (x, y) на плоскости. Попытаемся выделить на плоскости те точки, которые отвечают рационам, содержащим не менее c_1 калорий. Так как меню, состоящее из x граммов пшеницы и y граммов гороха, содержит a_1x+b_1y калорий, то для таких точек выполняется неравенство

$$a_1x+b_1y\geqslant c_1.$$

Из школьного курса алгебры вам известно, что точки, для которых $a_1x+b_1y=c_1$, лежат на прямой l_1, проходящей через точки $\left(0, \frac{c_1}{b_1}\right)$ и $\left(\frac{c_1}{a_1}, 0\right)$. Эта прямая разбивает плоскость на две части. Для точек (x, y), лежащих по одну сторону от прямой l_1, выполняется неравенство $a_1x+b_1y>c_1$, а для точек, лежащих по другую сторону,— неравенство $a_1x+b_1y<c_1$. Каждая из этих частей вместе с самой прямой l_1 называется *полуплоскостью*. Таким образом, одна полуплоскость состоит из всех точек (x, y), для которых

$$a_1x+b_1y\geqslant c_1,$$

а другая — из точек, для которых

$$a_1x+b_1y\leqslant c_1.$$

Так как в нашем случае a_1 и b_1 — положительные числа, то первая полуплоскость — это полуплоскость L_1,

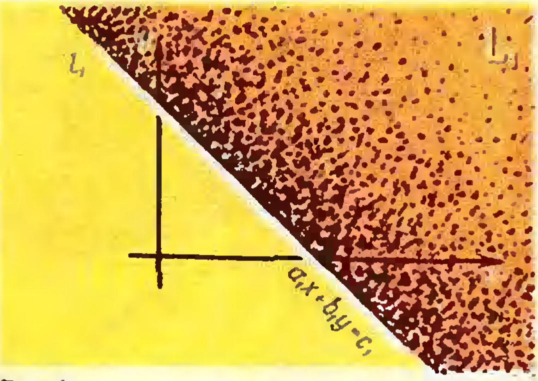


Рис 1.

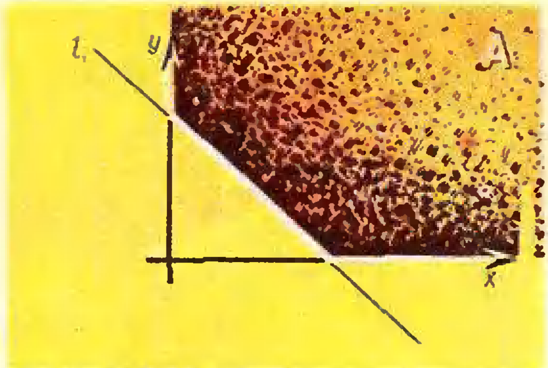


Рис. 2.

которая выделена на рисунке 1. Кроме того, из условия нашей задачи ясно, что x и y — неотрицательные числа (нельзя же давать цыпленку отрицательное количество корма). Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяют точки правой полуплоскости (ограниченной осью ординат), условию $y \geqslant 0$ удовлетворяют точки верхней полуплоскости (ограниченной осью абсцисс), а рационам, содержащим не менее c_1 калорий, отвечают точки (x, y), для которых одновременно выполнены три неравенства:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \\ a_1x + b_1y \geqslant c_1, \end{cases} \qquad (1)$$

то есть точки, лежащие в пересечении правой полуплоскости, верхней полуплоскости и полуплоскости L_1. На рисунке 2 выделено множество точек, соответствующих решениям системы неравенств (1). Перейдем к другим ограничениям. Если один грамм пшеницы содержит a_2 граммов белков, один грамм гороха — b_2 граммов белков, а дневной рацион цыпленка должен содержать не менее c_2 граммов белков, то, очевидно, достаточное количество белка содержат те рационы из x граммов пшеницы и y граммов гороха, для которых

$$a_2x + b_2y \geqslant c_2.$$

Соответствующие этим рационам точки лежат в полуплоскости L_2, ограниченной прямой l_2, которая задается уравнением $a_2x + b_2y = c_2$. Точно так же рацион должен удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} a_3x + b_3y \geqslant c_3, \\ a_4x + b_4y \geqslant c_4, \end{cases}$$

где a_3 и a_4 — количество жиров и углеводов в одном грамме пшеницы, b_3 и b_4 — количество жиров и углеводов в одном грамме гороха, c_3 и c_4 — минимальные количества жиров и углеводов в дневном рационе цыпленка. (Все величины измеряются в граммах.) Точки (x, y), удовлетворяющие первому из этих двух неравенств, лежат в полуплоскости L_3, а точки, удовлетворяющие второму неравенству, — в полуплоскости L_4. Рацион, содержащий достаточное количество всех компонентов (калорий, белков, жиров и углеводов), мы назовем допустимым. Таким образом, допустимыми будут те рационы, состоящие из x граммов пшеницы и y граммов гороха, которые удовлетворяют системе из шести линейных неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \\ a_1x + b_1y \geqslant c_1, \\ a_2x + b_2y \geqslant c_2, \\ a_3x + b_3y \geqslant c_3, \\ a_4x + b_4y \geqslant c_4. \end{cases} \qquad (2)$$

Соответствующие допустимым рационам точки плоскости лежат в пересечении правой полуплоскости, верхней полуплоскости и полуплоскостей L_1, L_2, L_3, L_4, то есть внутри или на границе фигуры (бесконечного мно-

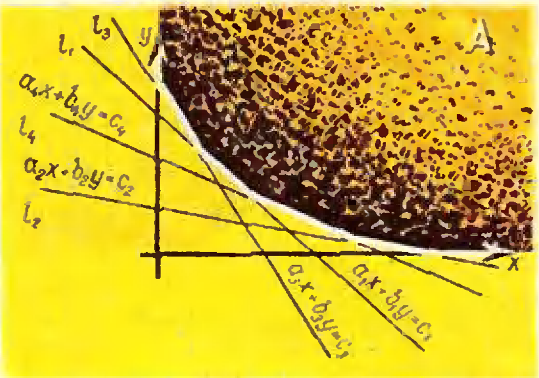


Рис. 3.

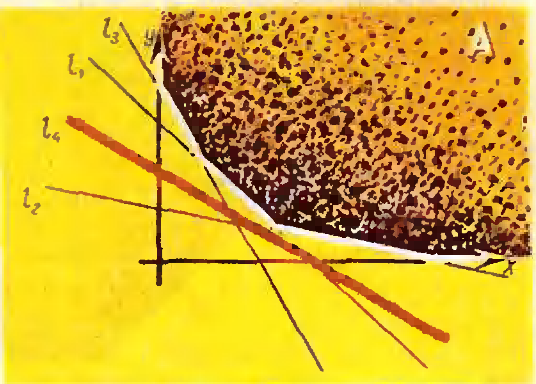


Рис. 4.

гоугольника) A, выделенной на рисунке 3.

На этом рисунке изображен тот случай, когда каждое неравенство в системе (2) существенно, то есть для каждого из шести неравенств найдется решение системы остальных пяти неравенств, не удовлетворяющее этому неравенству. Другой возможный случай изображен на рисунке 4.

Геометрически это означает, что одна из прямых (на рис. 4 — прямая l_4) лежит вне множества A, а алгебраически, что система (2) эквивалентна системе, из которой исключено одно из неравенств (в нашем случае — последнее неравенство). Всюду в дальнейшем, чтобы не делать специальных оговорок, мы будем предполагать, что имеет место случай, изображенный на рисунке 3.

Множество точек на плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит отрезок, соединяющий эти точки. На рисунке 5, *а* изображены некоторые выпуклые, а на рисунке 5, *б* — невыпуклые множества.

Полуплоскость — выпуклое множество, а так как пересечение любого числа выпуклых множеств — также выпуклое множество, то и множество A выпуклое.

Теперь постараемся выбрать из всех допустимых рационов самый дешевый. Пусть 1 грамм пшеницы стоит p копеек, а 1 грамм гороха — q копеек. Тогда рацион из x граммов пшеницы и y граммов гороха стоит $px+qy$ копеек. Таким образом, цена является *линейной функцией* от x и y, а задача нахождения самого дешевого рациона состоит в нахождении среди всех пар чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств (2), таких пар, для которых значение этой линейной функции достигает минимума. Другими словами, нужно найти те из точек множества A, в которых функция $px+qy$ достигает наименьшего значения из всех значений, принимаемых этой функцией в точках множества A.

Множество точек (x, y) плоскости, для которых выражение $px+qy$ равно некоторому числу k, является пр i-

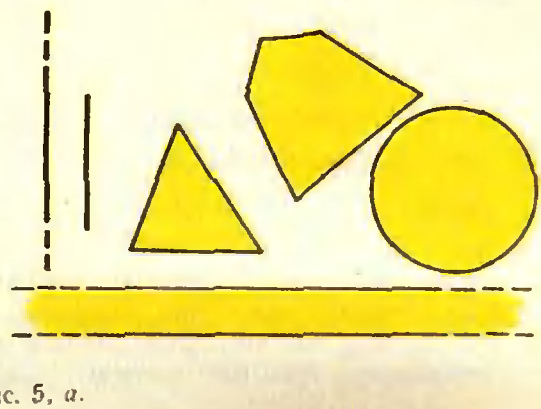


Рис. 5, *а*.

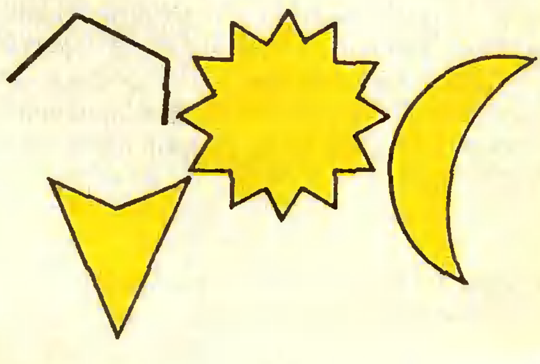


Рис. 5, *б*.

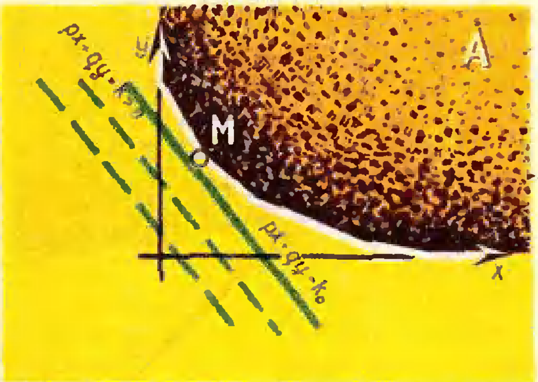


Рис. 6.

мой. При разных k такие прямые параллельны. При отрицательных и достаточно малых положительных значениях k эта прямая не пересекает множества A и, следовательно, не существует допустимого рациона ценой в k копеек. Если увеличивать значения k, начиная, например, с $k=0$, то прямая, задаваемая уравнением

$$px+qy=k,$$

будет смещаться вправо (см. рис. 6). Наконец, при некотором значении $k=k_0$ прямая $px+qy=k_0$ впервые пересечет множество A, «наткнувшись» на одну из его вершин (точка M на рис. 6) или сразу на целую сторону (это может произойти, если прямые $px+qy=k$ параллельны одной из прямых l_1, l_2, l_3, l_4 или, что то же самое, если отношение $\frac{p}{q}$ равно одному из отношений

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{a_4}{b_4};$$

см. дальше, рис. 8).

Прямая называется *опорной* к выпуклому множеству на плоскости, если это множество целиком лежит в одной из полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость, и в то же время по крайней мере одна точка множества лежит на прямой. Таким образом, уравнение $px+qy=k_0$ задает опорную прямую к множеству A.

Разберем теперь по отдельности два случая, о которых говорилось выше. Предположим сначала, что отношение $\frac{p}{q}$ не равно ни одному из отношений

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{a_4}{b_4}.$$

Тогда точка $M=(x_0, y_0)$ является *единственным решением задачи о самом дешевом допустимом рационе*. В самом деле, любая другая точка множества A лежит в полуплоскости K, задаваемой неравенством $px+qy\geqslant k_0$, и, следовательно, соответствует более дорогому рациону. Сторонами бесконечного многоугольника A служат лучи осей координат и отрезки прямых l_1, l_2, l_3, l_4. Поэтому на каждой из этих сторон одно из шести неравенств системы (2) превращается в равенство, а в каждой вершине многоугольника A превращаются в равенства два неравенства системы (2). В случае, изображенном на рисунке 6, точка M лежит на пересечении прямых l_1 и l_3 (см. рис. 3); следовательно,

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0=c_1, \\ a_3x_0+b_3y_0=c_3, \end{cases}$$

откуда

$$x_0=\frac{b_1c_3-b_3c_1}{a_3b_1-a_1b_3}; \quad y_0=\frac{c_1a_3-a_1c_3}{a_3b_1-a_1b_3}.$$

Зато остальные четыре неравенства в этой точке выполняются в строгом смысле, то есть со знаком «больше», а не «равно». Это означает, что рацион, состоящий из x_0 граммов пшеницы и y_0 граммов гороха, содержит минимально необходимое количество калорий и жиров, но избыточное количество белков и углеводов (если бы точка M лежала на пересечении других прямых, то вывод бы соответственно изменился).

Если бы специалисты по птицеводству решили, что цыплятам требуется немного больше чем c_2 граммов белков или немного больше чем c_4 граммов углеводов в день, то найденный нами самый дешевый рацион отвечал бы и этим новым требованиям (в самом деле, это означало бы, что прямые l_2 или l_4 немного сдвинулись бы вправо, но если такой сдвиг достаточно мал, то точка M все равно останется вершиной уменьшившегося многоугольника A). Однако если потребуется давать цыплятам чуть-чуть более калорийную пищу или чуть-чуть больше чем c_3

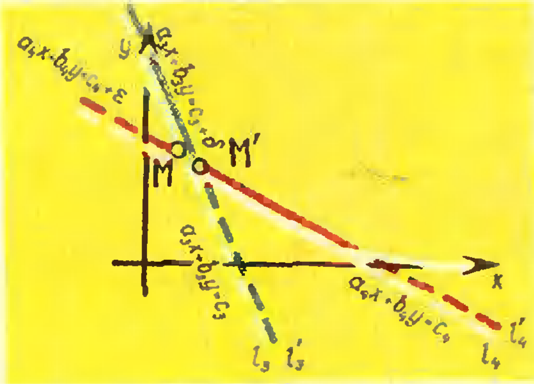


Рис. 7.

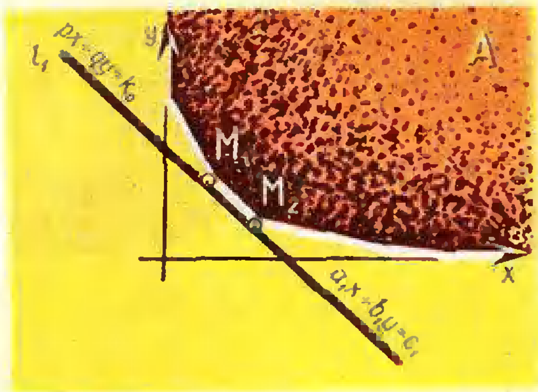


Рис. 8.

граммов жиров в день, то задачу о самом дешевом рационе придется решать заново, так как рацион, соответствующий точке M, перестанет быть допустимым, а самый дешевый рацион станет дороже (см. рисунок 7, где при усиленном требовании $a_3x+b_3y \geqslant c_3+\delta$ самому дешевому рациону отвечает точка M', лежащая внутри полуплоскости K).

Рассмотрим теперь случай, когда отношение $\frac{p}{q}$ равно одному из четырех отношений, например $\frac{a_1}{b_1}$ (см. рис. 8). В этом случае прямая $px+qy=k_0$ совпадает с прямой l_1. Все точки множества A, за исключением точек отрезка M_1M_2, лежат внутри полуплоскости K, и, следовательно, рацион, соответствующий любой точке отрезка M_1M_2, является самым дешевым допустимым рационом. Таким образом, среди точек, соответствующих решениям задачи о самом дешевом рационе, всегда имеются вершины многоугольника A.

Немного теории

Для нахождения решения достаточно сравнить значения функции $px+qy$ во всех вершинах. Если среди этих значений имеется одно, которое меньше всех остальных, то соответствующая вершина является единственным решением задачи; если значения в двух вершинах равны и меньше значений в остальных вершинах, то эти вершины обязательно соседние, и все точки стороны, соединяющей эти вершины, служат решениями задачи.

Будем для краткости называть острый угол, образуемый прямой с осью абсцисс, углом наклона прямой. Если двигаться по границе множества допустимых точек, начиная с луча оси абсцисс в сторону луча оси ординат, то каждая следующая сторона лежит на прямой с большим углом наклона, чем предыдущая. Тангенсы этих углов тоже будут возрастать. Тангенс угла наклона α прямой $ax+by=c$ $(a>0,\ b>0)$ равен $\frac{a}{b}$. (Если $b=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и принято считать, что $\operatorname{tg}\alpha$ равен бесконечности.)

Пусть опорная прямая проходит через вершину M множества допустимых точек и угол наклона этой прямой равен β, а углы наклона прямых, на которых лежат стороны, прилегающие к вершине M, равны α_1 и α_2. Тогда угол β больше одного из этих углов и меньше другого (см. рис. 9).

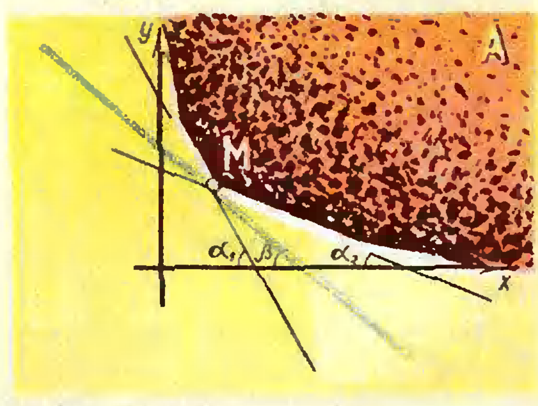


Рис. 9.

Таким образом, для того чтобы найти вершину, через которую проходит опорная прямая данного направления, нужно сравнить угол наклона прямых данного направления с углами наклона прямых, на которых лежат стороны множества допустимых точек, и выбрать такие две соседние стороны, между углами наклона которых лежит угол β. Точка пересечения этих сторон и будет искомой вершиной. Если угол β совпадает с углом наклона одной из сторон, то искомая опорная прямая совпадает с прямой, на которой лежит эта сторона. Вместо сравнения углов наклона можно сравнить их тангенсы, что значительно удобнее, так как тангенс угла наклона просто выражается через коэффициенты уравнения прямой.

Численные примеры

1. Среди решений системы линейных неравенств $2x+y\geqslant 10$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\geqslant 8$, $3x+7y\geqslant 42$, $x+5y\geqslant 20$ найти такие, для которых линейная функция $4x+3y$ достигает минимума *).

Таблица 1

Уравнение прямой	Точки на осях координат, через которые проходит прямая	Тангенс угла наклона прямой
$y=0$		0
$x+5y=20$	$(0,4)$, $(20,0)$	$\frac{1}{5}$
$3x+7y=42$	$(0,6)$, $(14,0)$	$\frac{3}{7}$
$x+y=8$	$(0,8)$, $(8,0)$	1
$2x+y=10$	$(0,10)$, $(5,0)$	2
$x=0$		∞
$4x+3y=c$	$\left(0, \frac{3}{c}\right)$, $\left(\frac{c}{4}, 0\right)$	$\frac{4}{3}$

Множество допустимых точек изображено на рисунке 10, из которого

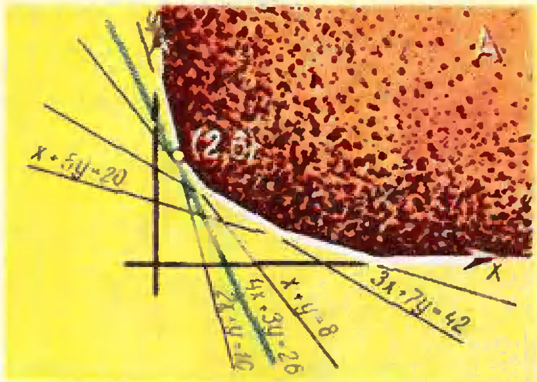


Рис. 10

видно, что сторонами этого множества служат лучи осей координат и отрезки всех четырех прямых: $x+5y=20$, $3x+7y=42$, $x+y=8$, $2x+y=10$.

Опорная прямая с тангенсом угла наклона $\frac{4}{3}$ должна проходить через вершину, лежащую на пересечении пары соседних сторон, одна из которых имеет тангенс угла наклона меньше $\frac{4}{3}$, а другая — больше $\frac{4}{3}$. Такую пару образуют стороны, лежащие на прямых

$$x+y=8 \quad \text{и} \quad 2x+y=10,$$

с тангенсами углов наклона 1 и 2 соответственно. Таким образом, координаты искомой вершины определяются из системы

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 2x+y=10, \end{cases}$$

откуда $x=2$, $y=6$. Значение функции $4x+3y$ в этой точке равно $4\cdot 2+3\cdot 6=26$, а опорная прямая определяется уравнением $4x+3y=26$.

Для сравнения вычислим значения функции $4x+3y$ во всех остальных вершинах множества допустимых точек (см. таблицу 2 на стр. 8).

2. Среди решений системы линейных неравенств $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $3x+y\geqslant 15$, $3x+4y\geqslant 36$, $x+2y\geqslant 12$, $2x+8y\geqslant 32$ найти такие, для которых функция $3x+12y$ достигает минимума.

*) Численные данные этого примера никак не связаны с величинами, которые задаются в задаче о корме для цыплят.

Таблица 2

Уравнения прямых, на пересечении которых лежит вершина	Координаты вершины		Значения функции $4x+3y$ в вершине
	x	y	
$x=0,\ 2x+y=10$	0	10	$4\cdot 0+3\cdot 10=30$
$2x+y=10,\ x+y=8$	2	6	$4\cdot 2+3\cdot 6=26$
$x+y=8,\ 3x+7y=42$	3,5	4,5	$4\cdot 3{,}5+3\cdot 4{,}5=27{,}5$
$3x+7y=42,\ x+5y=20$	8,75	2,25	$4\cdot 8{,}75+3\cdot 2{,}25=41{,}75$
$x+5y=20,\ y=0$	20	0	$4\cdot 20+3\cdot 0=80$

Таблица 3

Уравнение прямой	Точки на осях координат, через которые проходит прямая	Тангенс угла наклона прямой
$y=0$		0
$2x+8y=32$	$(0,4),\ (16,0)$	$\frac{1}{4}$
$x+2y=12$	$(0,6),\ (12,0)$	$\frac{1}{2}$
$3x+4y=36$	$(0,9),\ (12,0)$	$\frac{3}{4}$
$3x+y=15$	$(0,15),\ (5,0)$	3
$x=0$		∞
$3x+12y=c$	$\left(0,\ \frac{c}{12}\right),\ \left(\frac{c}{3},\ 0\right)$	$\frac{1}{4}$

Множество допустимых точек изображено на рисунке 11, из которого видно, что прямая $x+2y=12$ лежит целиком вне этого множества. Таким образом, сторонами этого множества служат лучи осей координат и отрезки

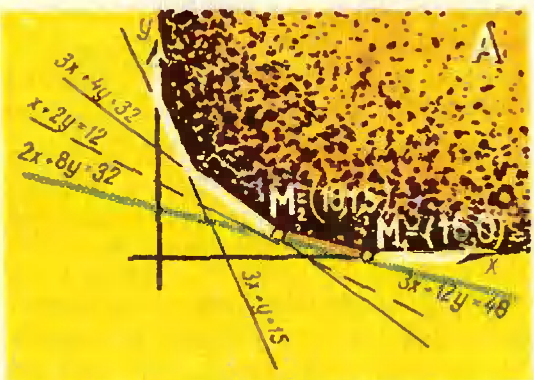


Рис. 11.

трех оставшихся прямых. Так как тангенс угла наклона прямых $3x+$ $+12y=c$ совпадает с тангенсом угла наклона одной из прямых, на которых лежат стороны множества допустимых точек (прямой $2x+8y=32$), то опорная прямая совпадает с этой прямой. Решениями задачи служат все точки стороны, лежащей на этой прямой. Концами этой стороны служат вершины, лежащие в точках пересечения прямой $2x+8y=32$ с соседними прямыми — $y=0$ и $3x+4y=36$ (напомним, что прямую $x+2y=12$ мы исключили из рассмотрения).

Итак, координаты $(x_1,\ y_1)$ первой вершины M_1 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+8y_1=32, \\ y_1=0, \end{cases}$$

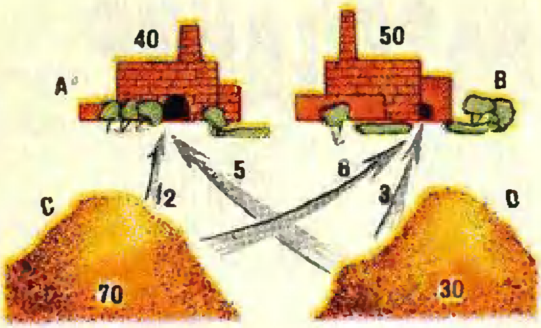


Рис. 12.

откуда $x_1=16$, $y_1=0$, а координаты (x_2, y_2) второй вершины M_2 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_2+8y_2=32, \\ 3x_2+4y_2=36, \end{cases}$$

откуда $x_2=10$, $y_2=1{,}5$.

Решениями задачи служат все точки отрезка M_1M_2, другими словами, точки вида $(16\lambda+10(1-\lambda), 1{,}5\cdot(1-\lambda))=(10+6\lambda, 1{,}5-1{,}5\lambda)$, где λ — любое число между 0 и 1. Значение функции $3x+12y$ во всех точках отрезка M_1M_2 равно 48.

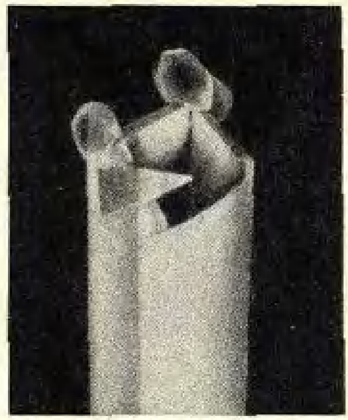
Упражнения*)

1. Решите «задачу о велосипедах».
2. Решите «задачу о карьерах» с данными, приведенными на рисунке 12.
3. Как изменится множество допустимых точек в задаче о самом дешевом рационе, если потребовать дополнительно, чтобы вес рациона не превосходил s грамм? Может ли такое ограничение повлиять на решение?
4. Доказать, что любой выпуклый многоугольник на плоскости можно представить как множество решений системы линейных неравенств.
5. Пусть $\frac{p}{q}=\frac{a_1}{b_1}$ (см. рис. 3 и 8). Как в этой ситуации изменятся решения задачи о самом дешевом рационе, если заменить в системе (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } c_1 \text{ на } c_1+\delta, \\ \text{б) } c_2 \text{ на } c_2+\delta, \\ \text{в) } c_n \text{ на } c_n+\delta; \end{array}\right\} \delta \text{ — положительное, но очень маленькое число?}$$

---

*) Ответы к этим упражнениям будут помещены в следующем номере.



КВАРЦ ВОЛОСАТЫЙ

В природе издавна известен камень, называвшийся в России «кварц волосатый». Это прозрачный кристалл кварца, пронизанный блестящими золотыми нитями (см. рисунок на обложке).

Плиний назвал эти нити «Волосами Венеры», а на востоке их называли «Волосами Магомета» и камень считали священным. В настоящее время эти «волосы», или, как их теперь называют, нитевидные кристаллы, выращиваются в лабораторных условиях. Исследования с помощью электронного микроскопа показали, что «Волосы Венеры» не что иное, как очень тонкие и длинные кристаллы окисла титана (TiO_2 — рубин), представляющие собой трубки прямоугольного сечения с толщиной стенок 1—2 *мк* (см. фотографию).

Нитевидные кристаллы обладают целым рядом очень интересных свойств, одно из которых — высокая прочность — дает возможность создавать на их основе новые, так называемые композиционные материалы.

М. А. Голосова

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. Р. Зильберман

В этой статье рассказывается о методе, позволяющем упрощать сложные задачи по расчету электрических цепей.

Что мы понимаем под «преобразованием цепи»? Предположим, что у нас есть сложная схема из сопротивлений, имеющая множество выводов и подключенная к источникам. Заменим эту схему другой, с тем же числом выводов, причем так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами у новой схемы были такими же, как у старой. Ясно, что источники «ничего не узнают» об этой замене, и токи, потребляемые схемой, останутся прежними. Но найти эти токи, возможно, окажется проще.

Следовательно, если мы хотим подсчитать токи в сложной схеме, ее можно заменить более простой эквивалентной схемой. При этом токи внутри заменяемой части меняются. Поэтому так поступать можно только с той частью схемы, которая нас непосредственно не интересует.

С подобными заменами вы уже встречались.

Пусть, например, в схеме два сопротивления r_1 и r_2 включены последовательно, их мы можем заменить одним, равным по величине сумме r_1+r_2. Если же два сопротивления включены параллельно, то их также можно заменить одним, величина которого равна $R=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$. Это простейшие примеры преобразования цепей. Мы же остановимся на более сложных схемах.

Посмотрим, как преобразуются друг в друга схемы, имеющие по три вывода — «звезда» (рис. 1, *а*) и «треугольник» (рис. 1, *б*).

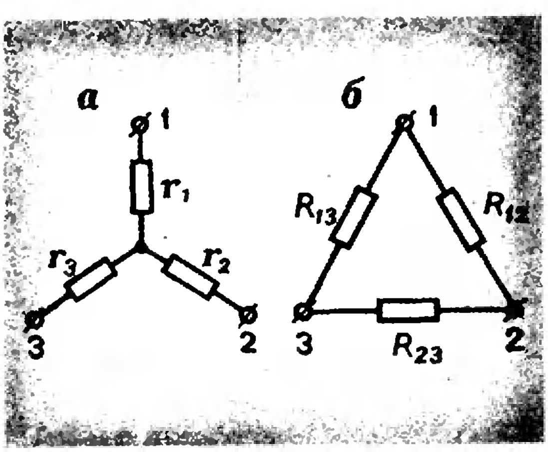


Рис. 1.

Немного непривычные обозначения (рис. 1, *б*) очень удобны, индексы показывают, между какими точками включено сопротивление. Например, сопротивление R_{13} включено между точками *1* и *3* и т. д.

Если мы хотим заменить одну из этих схем другой, нужно получить такие соотношения между r и R, чтобы сопротивления между любыми точками были для обеих схем одинаковы.

В схеме «звезды» (рис. 1, *а*) сопро-

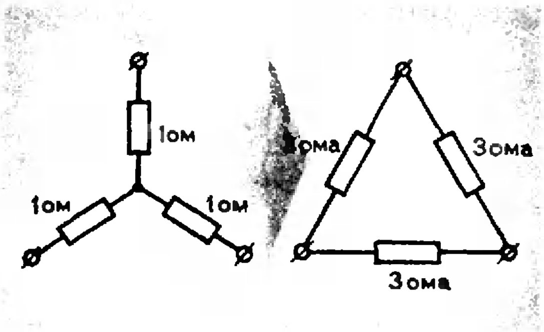


Рис. 2.

тивление между точками *1* и *2* равно $r_1 + r_2$, а в схеме «треугольника» (рис. 1, *б*) оно равно

$$\frac{R_{12}(R_{13}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Следовательно, для того чтобы сопротивления между точками *1* и *2* были одинаковы для обеих схем, необходимо, чтобы

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}(R_{13}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \quad (1)$$

Аналогично для точек *2* и *3*:

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}(R_{12}+R_{13})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}, \quad (2)$$

и для точек *1* и *3*:

$$r_1 + r_3 = \frac{R_{13}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \quad (3)$$

Эта система уравнений легко решается. Сложим все уравнения и поделим обе части на 2:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_{12}R_{13}+R_{12}R_{23}+R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \quad (4)$$

Вычтя теперь из уравнения (4) уравнение (2), получим

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Аналогично найдем, что

$$r_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \quad \text{и}$$

$$r_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

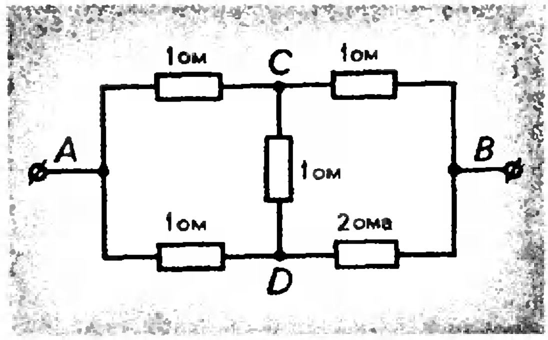


Рис. 3.

Эти результаты легко запомнить: знаменатель всюду один и тот же, а в числителе справа дважды встречается тот же индекс, что и слева: $r_1 \to R_{12}R_{13}$, $r_2 \to R_{12}R_{23}$, $r_3 \to R_{13}R_{23}$.

Немного сложнее получить формулы для обратного преобразования:

$$R_{12} = \frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_3},$$

$$R_{13} = \frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_2},$$

$$R_{23} = \frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1},$$

но их также легко запомнить — числитель всюду один и тот же, а в знаменателе как раз тот индекс, которого недостает слева.

Пользуясь формулами, которые мы только что получили, можно производить замену одной схемы другой. Так, например, звезду с сопротивлениями в 1 ом (рис. 2) можно заменить треугольником с сопротивлениями в 3 ома.

Решим теперь задачу. *Найти сопротивление между точками A и B в схеме на рисунке 3.*

Это обычная схема «мостика», но в нашей задаче «мостик» не уравновешен. Такие задачи приходится решать при помощи уравнений Кирхгофа. В школьной программе их нет, да и вычисления с помощью этих уравнений очень громоздкие — в нашем случае получилась бы система пяти уравнений с пятью неизвестными. Мы поступим проще: заменим

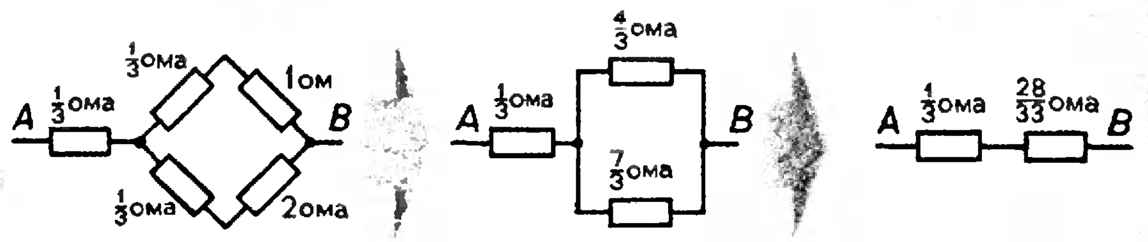


Рис. 4.

«треугольник» ACD «звездой», как показано на рисунке 4.

Теперь ясно, что сопротивление между точками A и B будет равно

$$\frac{1}{3}+\frac{28}{33}=\frac{13}{11} \text{ ома.}$$

Мы заменяли «треугольник» ACD «звездой», но можно было решать задачу иначе — заменяя «звезду» ADB «треугольником».

Пусть теперь к точкам A и B подключена батарея с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и с э. д. с. $E=1$ *в*. Нужно найти ток через участок CB.

Преобразовать схему надо так, чтобы не затронуть интересующее нас сопротивление CB. Подойдет то преобразование, которое мы делали раньше (рис. 4).

Используя то, что $R_{AB}=\frac{13}{11}$ ома, получим $I=\frac{E}{R_{AB}}=\frac{11}{13}$ *а*. После разветвления токи поделятся в отношении, обратном сопротивлениям ветвей:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{7}{4}.$$

При этом $I_1+I_2=I$. (I — ток до разветвления, I_1 — ток в верхней ветви, I_2 — ток в нижней ветви).

Отсюда

$$I_1=\frac{7}{13}\ a$$

Немного сложнее было бы найти ток, идущий через участок CD. Для этого пришлось бы еще найти ток, идущий через участок AC, а затем вычесть из него найденный уже ток, идущий через участок CB.

Можно еще немного усложнить задачу — учесть внутреннее сопротивление батареи. Тогда полный ток $I=\frac{E}{r+R_{AB}}$, а остальные токи находятся так же, как и раньше.

Рассмотрим более интересную задачу: *при каком соотношении между величинами сопротивлений r и R сопротивление между точками A и B в схеме, показанной на рисунке 5, максимально в крайнем положении движка потенциометра?*

Сначала преобразуем схему, заменив «треугольник» ACD «звездой» (рис. 6).

Очевидно, что сопротивление r не влияет на соотношение сопротивлений в остальной цепи. Займемся поэтому оставшейся частью схемы. Тут включены параллельно два сопротивления: $5r+R_1$ и $7r+R_2$, где R_1 и R_2 — сопротивления соответственно верхней и нижней частей по-

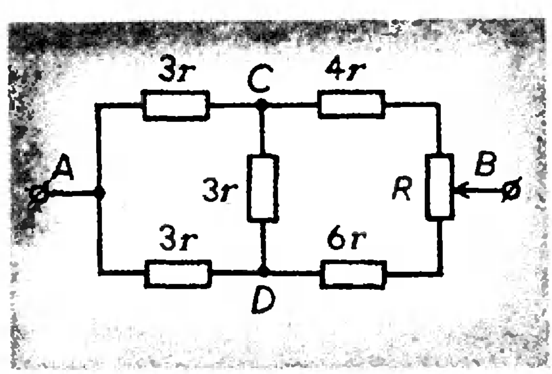


Рис. 5.

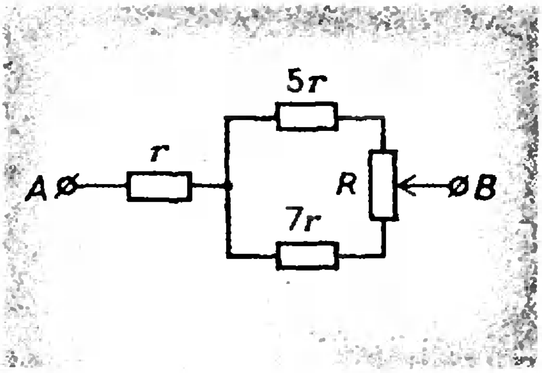


Рис. 6.

тенциометра. Причем сумма сопротивлений $5r+R_1$ и $7r+R_2$ остается постоянной. Посмотрим, какими они должны быть, чтобы полное сопротивление было максимальным. Обозначим $5r+R_1$ через r_1 и $7r+R_2$ через r_2. Тогда общее сопротивление включенных параллельно частей схемы $r_0=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$. Если учесть, что $r_1+r_2=\text{const}=c$, то сопротивление r_0 выразится так: $\frac{r_1(c-r_1)}{c}$. Это выражение максимально, когда максимален числитель. Но $y=(cr_1-r_1^2)$ — это уравнение параболы (рис. 7), ветви которой пересекают ось абсцисс в точках O и c. Поэтому числитель дроби наибольший при $r_1=\frac{c}{2}$. Так как $r_1+r_2=c$, то это означает, что сопротивление между точками A и B максимально, если $r_1=r_2$, то есть $5r+R_1=7r+R_2$, или $R_1-R_2=2r$.

Ясно, что это возможно лишь в том случае, если сопротивление всего потенциометра $R=R_1+R_2$ не меньше чем $2r$. В противном же случае максимум сопротивления между точками A и B достигается, когда движок потенциометра находится в крайнем положении.

Итак, ответ: $R\leqslant 2r$.

Метод, о котором мы рассказали, очень удобен для последовательного преобразования сложной схемы к простому виду. Он позволяет рассчитать практически любую сложную цепь, состоящую из сопротивлений.

Этот метод можно применять к

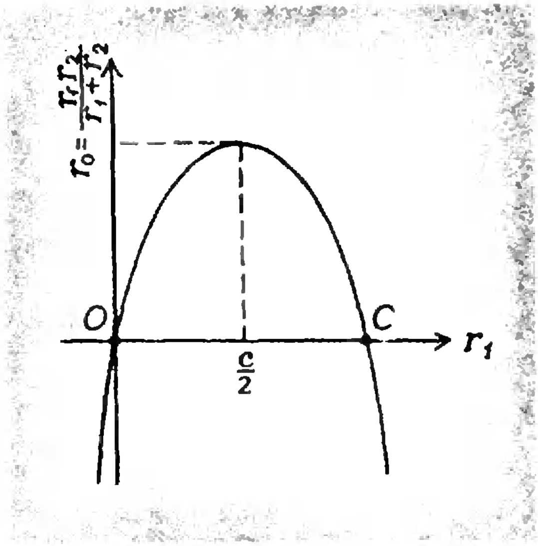


Рис. 7

цепям, содержащим не только сопротивления.

Обратите внимание на то, что мы вообще не говорили нигде о физических процессах в цепи, а пользовались только формальным выражением для закона Ома: $U=r\cdot I$. Из него следует, что при последовательном соединении сопротивлений их величины складываются, а при параллельном — складываются величины, обратные сопротивлениям $\left(\frac{1}{r_{общ}}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$. Понятно, что если какие-нибудь другие физические величины связаны законом, аналогичным закону Ома, то все наши выводы справедливы и для них.

В качестве примера рассмотрим цепь с конденсатором (рис. 8). Мы знаем, что $Q=C\cdot U$, или $U=\frac{1}{C}Q$.

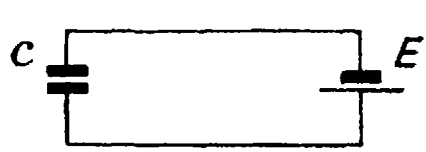


Рис. 8.

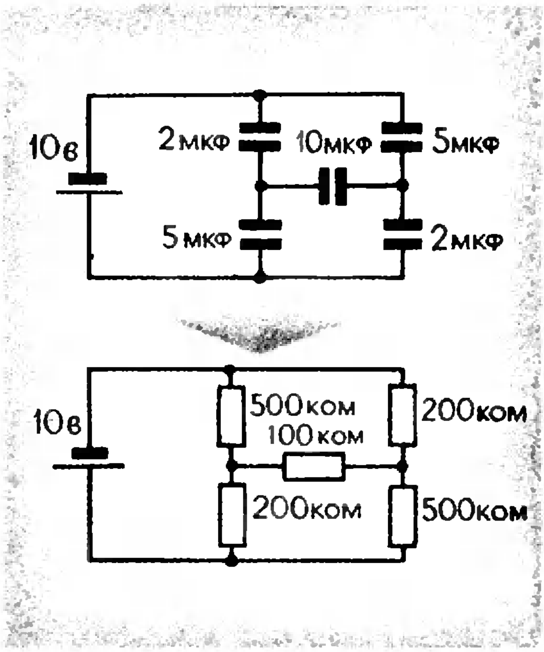


Рис. 9.

Сравним это с выражением для закона Ома $U=r\cdot I$.

Видно, что законы похожи, только вместо тока стоит заряд, а вместо сопротивления — величина, обратная емкости. Это означает, что для того, чтобы найти, скажем, заряды на конденсаторах, можно поступить так. Вместо цепи, содержащей конденсаторы, нарисовать цепь, содержащую сопротивления, причем конденсатор емкостью x фарад заменить сопротивлением $r=\frac{1}{x}$ *ом*. После того, как мы рассчитаем токи в цепи из сопротивлений, можно сразу написать, каковы заряды на конденсаторах: если по сопротивлению течет ток $I=y$ ампер, то на соответствующем конденсаторе будет заряд $Q=y$ кулонов.

Э. д. с. батарей при таком преобразовании цепи остаются без изменения. Но, разумеется, в цепи с конденсаторами внутренние сопротивления батарей не влияют на результат. Поэтому, преобразуя цепь, нам придется лишить батареи их внутренних сопротивлений.

Пусть, например, нужно найти заряд на конденсаторе емкостью 10 *мкф* (рис. 9). Конденсатору

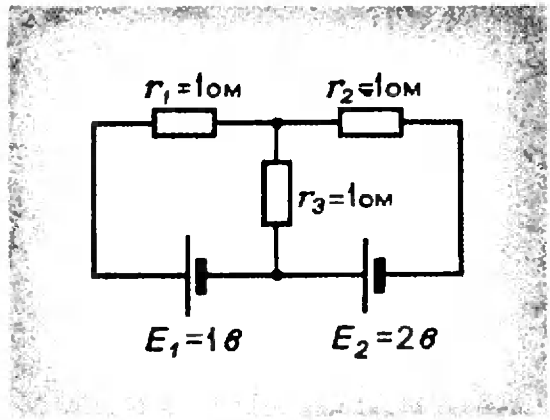


Рис. 10.

$C=2$ *мкф* $=2\cdot10^{-6}$ *ф* соответствует сопротивление $r=5\cdot10^{5}$ *ом* $=500$ *ком*. Далее расчет проводится уже совсем просто.

Таким образом, метод преобразования цепей, как мы видим, пригоден и для схем из конденсаторов.

Упражнения

1. Найти ток через сопротивление r_3 в схеме, показанной на рисунке 10. (Попробуйте найти сначала токи, текущие через батареи.)

2. Какой заряд протечет через батарею при замыкании ключа на схеме, приведенной на рисунке 11?

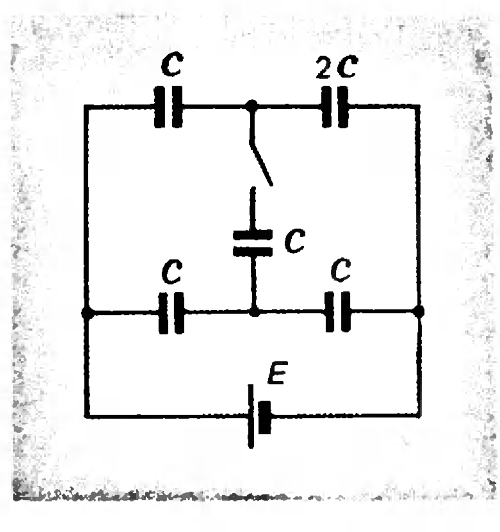


Рис. 11.

НРАВИТСЯ ЛИ ВАМ ВОЗИТЬСЯ С ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ?

М. И. Башмаков

Нескольким школьникам предложили ответить на такой вопрос: Узнать, верно или нет равенство $3^{100}+7^{100}=8^{100}$.

Через несколько минут все они ответили, что это равенство неверно. Вот наиболее типичные объяснения.

1) Посмотрим на последнюю цифру чисел, стоящих справа и слева. 3 в квадрате — это 9. 3 в кубе кончается на 7, в четвертой степени — на 1, в пятой — на 3, в шестой — на 9 и т. д. Через четыре степени последняя цифра повторяется, поэтому у числа 3^{100} последняя цифра та же, что у 3^4, то есть 1. Точно так же легко сосчитать, что у 7^{100} последняя цифра тоже 1, а у 8^{100}—6. Итак, у числа слева последняя цифра 2, а справа — 6. Следовательно, числа слева и справа различны.

2) $3+7$ больше, чем 8. Но $3^2+7^2=58$ меньше, чем $8^2=64$. Далее, $3^{100}+7^{100}=(3^2)^{50}+(7^2)^{50}<(3^2+7^2)^{50}=58^{50}<64^{50}=8^{100}$. Получили, что слева стоит число меньшее, чем справа.

3) Число, стоящее слева, делится на 2, но не делится на 4. Действительно, любое нечетное число в квадрате дает единицу в остатке от деления на 4: $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$. Сумма двух таких чисел $(3^{50})^2+(7^{50})^2$ дает в остатке 2. Справа же стоит число, делящееся на 4.

Похожи ли друг на друга приведенные доказательства? Легко заметить сходство первого и третьего: в том и в другом сравниваются остатки от деления на некоторое целое число, в одном — на 10 (последняя цифра), а в другом — на 4. Но найти аналогию между этими доказательствами и вторым совсем не так просто. Мы попробуем пояснить ее в конце этой статьи. Пока же научимся применять первый способ рассуждения к некоторым другим задачам.

Вычисления «по модулю»

З а д а ч а 1. Доказать, что уравнение $x^3=2+3y^2$ не имеет решений в целых числах.

Рассмотрим это уравнение «по модулю 9», то есть с точностью до слагаемых, кратных девяти *). Поскольку каждое целое число x имеет вид $3n$, $3n-1$ или $3n+1$, где n — целое, а $(3n\pm1)^3=27n^3\pm27n^2+9n\pm1=9k\pm1$, где k — целое число, то любое число в кубе или делится на 9, или дает при делении на 9 в остатке 1 или 8. Точно так же, поскольку

$$3(3n\pm1)^2=27n^2\pm18n+3,$$

$3y^2$ дает при делении на 9 остаток 0 или 3. Итак, правая часть нашего уравнения по модулю 9 может равняться только 2 или 5, а левая — только 0, 1 или 8, так что они не могут совпадать ни при каких целых x и y.

Самым трудным местом в таком решении является выбор «модуля», то есть того числа, остатки от деления на которое мы рассматриваем. Сами же вычисления «по модулю» проделать просто. Сформулируем основное правило этих вычислений: если при сложении (или при умножении) мы заменяем числа сравнимыми с ними по

*) Вообще, два целых числа a и b называют сравнимыми по модулю k, если разность $a-b$ делится на k. Тем, кто не знаком с этим понятием, мы советуем посмотреть статью А. А. Егорова «Арифметика остатков» в «Кванте» № 5, 1970.

модулю k, то получаем число, сравнимое с суммой (или произведением) по модулю k. Иными словами, в равенстве, в котором фигурируют действия сложения и умножения, можно заменять числа на сравнимые с ними по модулю k всегда, когда в ответе мы интересуемся лишь остатком от деления на k.

То, что a и b сравнимы по модулю k, записывают так: $a \equiv b \pmod k$. Правила операций над сравнениями можно записать так:

$$\text{если} \begin{cases} a \equiv b \pmod k, \\ c \equiv d \pmod k, \end{cases}$$

$$\text{то} \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod k, \\ ac \equiv bd \pmod k. \end{cases}$$

Напомним, что по определению $a \equiv b \pmod k$ означает, что $a - b = k \cdot q$*).

Займемся такой, довольно искусственной задачей.

З а д а ч а 2. Доказать, что равенство $1153^{60} + 211^{60} = 27027 \cdot 100^x + 2$ невозможно ни при каком целом x.

Ясно, что если по какому-либо модулю мы не получим равенства, то его не может быть и в обычном смысле. По модулю 2 никакого противоречия не обнаруживается — справа и слева стоят четные числа (нули по модулю 2). Займемся модулем 3. $1153 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 1153^{60} \equiv 1 \pmod 3$; $211 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 211^{60} \equiv 1 \pmod 3$. Справа $27027 \equiv 0 \pmod 3$. Поэтому вся правая часть дает в остатке 2. Снова не получаем противоречия. Если у вас хватит терпения, убедитесь в том, что по модулю всех чисел до 16 включительно написанное равенство справедливо. (Вы заметите, что $27027 \cdot 100^x$, $x \geqslant 2$, делится на каждое из этих чисел, а слева будет получаться в остатке 2.)

Если вы будете последовательны, то по модулю 17 вы получите следующее равенство: $(-3)(-2)^x + 2 \equiv 0 \pmod{17}$. Перебирая подряд значения x (цикл здесь получится длины 8), вы ни разу не получите нужного равенства. Противоречие найдено.

Проделанные выкладки будят сразу много вопросов:

(1) Если равенство неверно, то можно ли это обнаружить по какому-либо модулю?

(2) Можно ли как-то указывать те модули, по которым более вероятно получение противоречия?

(3) Связано ли между собой поведение равенства по разным модулям?

Если идет речь о каком-то конкретном числовом равенстве (как это было у нас в самом первом примере), то, конечно, всегда найдется такое число, сравнивая по модулю которого мы нащупаем противоречие (например, можно взять число, большее обеих частей равенства). Гораздо более интересны равенства, в которых есть переменные (так было в двух последних примерах). Для уравнений в целых числах каждый из трех поставленных вопросов интересен и не всегда исследован до конца.

Немного недоказанного

Первые уравнения в целых числах, при решении которых появляются серьезные трудности, — это квадратные уравнения *). Издавна математики интересовались вопросами такого сорта: можно ли данное целое число представить в виде суммы двух квадратов? Оказалось, что разрешимость уравнений вида $x^2 + y^2 = a$ и других более общих, задаваемых многочленами второй степени, сводится к проверке разрешимости сравнений (положи-

*) Будьте осторожны с делением сравнений. Если $ac \equiv bc \pmod k$, то не обязательно верно, что $a \equiv b \pmod k$. Например, $27 \equiv 3 \pmod 6$, но $9 \not\equiv 1 \pmod 6$. Однако если c взаимно просто с модулем k, то сокращать на c можно. Это является следствием такого важного и не просто доказываемого факта: если c взаимно просто с k, то существует такое целое число x, что $cx \equiv 1 \pmod k$.

*) Теория линейных целочисленных уравнений довольно проста. В то же время она содержит ряд интересных задач, близких к элементарным, и заслуживает отдельной статьи.

тельный ответ на первый вопрос). Затем было доказано, что в проверке нуждаются лишь сравнения по некоторым модулям (в конечном числе), которые несложно определяются по уравнению. Так, в приведенном примере требуется проверка по всем делителям числа a^2, а также по модулю 8. (Двойка и ее степени играют особую роль в уравнениях степени 2.) Тем самым был получен ответ и на второй вопрос. Доказательство этих фактов вывело бы нас далеко за рамки настоящей статьи. Настойчивым и трудолюбивым читателям можно порекомендовать книгу З. И. Боревича и И. Р. Шафаревича «Теория чисел», в которой эта теория изложена со всеми деталями.

О том, как связана между собой разрешимость сравнений по разным модулям, мы можем кое-что сказать уже сейчас. Заметим, во-первых, что если число делится на каждое из двух взаимно простых чисел*), то оно делится и на их произведение. Отсюда сразу следует, что если некоторое равенство верно по модулю k и по модулю m и если k и m взаимно просты, то оно верно и по модулю km. Теперь ясно, что проверять приходится только по модулю степеней простых чисел. Второе полезное соображение: из разрешимости уравнения по модулю p^n (во всяком случае при достаточно большом n) часто следует разрешимость по модулю p^{n+1}.

Проверим, например, что для простого числа p, не равного 2 и не являющегося делителем a, из разрешимости сравнения $x^2+y^2=a \pmod{p^n}$ следует его разрешимость по модулю p^{n+1}, уже начиная с $n=1$. Действительно, пусть x_1, y_1 — решение исходного сравнения, то есть $x_1^2+y_1^2=a+p^nq$, где q — целое число. Будем подбирать числа x_2 и y_2 так, чтобы получить $(x_1+x_2p^n)^2+(y_1+y_2p^n)^2\equiv a \pmod{p^{n+1}}$. Раскроем скобки и заменим $x_1^2+y_1^2-a$ на p^nq. Получим, что $2x_1x_2p^n+x_2^2p^{2n}+2y_1y_2p^n+y_2^2p^{2n}+p^nq\equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$. Ясно, что при $n\geqslant 1$ число p^{2n} делится на p^{n+1}. Осталось подобрать x_2, y_2 так, чтобы число $p^n(2x_1x_2+2y_1y_2+q)$ делилось на p^{n+1}, то есть чтобы число $2x_1x_2+2y_1y_2+q$ делилось на p. Заметим, что по модулю p хотя бы один из коэффициентов при x_2 или y_2 (то есть $2x_1$ или $2y_1$) не равен нулю (так как иначе или $p=2$, или числа x_1 и y_1 оба делятся на p, а тогда и $a=x_1^2+y_1^2-p^nq$ тоже делилось бы на p, что противоречит условию). Можно доказать, что в этом случае линейное сравнение по модулю p разрешимо. Действительно, будем считать для определенности, что $2x_1\not\equiv 0 \pmod p$. Положим y_2 равным нулю. Итак, нужно доказать, что сравнение $2x_1x_2\equiv -q$ разрешимо. Рассмотрим числа $2x_1\cdot 0$, $2x_1\cdot 1$, ..., $2x_1(p-1)$. Покажем, что они попарно не сравнимы. Если $2x_1\cdot i\equiv 2x_1\cdot j$, то $2x_1(i-j)\equiv 0$. Однако $2x_1$ не делится на p, и если $i\neq j$, то $i-j$ тоже не делится на p. Поэтому p чисел $2x_1\cdot 0$, $2x_1\cdot 1$, ..., $2x_1(p-1)$ попарно не сравнимы, и, следовательно, среди них найдется число, сравнимое с $-q$.

*) Напомним, что два целых числа называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, больших 1.

Гораздо более глубокими являются связи разрешимости по различным простым p. Исследование таких связей представляет сейчас одну из наиболее бурно развивающихся ветвей теории чисел. Заметим только, что если рассматривать решения некоторого сравнения по модулю различных p, то эти решения в конечном их числе не связаны между собой. В то же время все вместе они связаны, как это ни покажется странным, с поведением уравнения, рассматриваемого не только для целых, но и для всех вещественных чисел. Так, например, оказывается, что разрешимость уравнения $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=0$ по модулю степеней всех простых чисел, кроме любого одного, и разрешимость его в вещественных числах (для этого надо, чтобы числа a_1, a_2, a_3 не все были одного знака) влечет за собой разрешимость его и по модулю степеней оставшегося простого числа. (Разумеется, ищется решение, у которого не все x_1, x_2, x_3 — нули.)

Принцип Минковского—Хассе

Вернемся к первому из поставленных вопросов. Решение уравнения второй степени — сведение его к разрешимости конечного числа сравнений, — полученное еще Дирихле, подсказало математикам такой метод исследования вопросов, касающихся целых чисел: поставить эти вопросы «по модулю p», а затем из поведения по всем p делать общие выводы. Такой способ рассуждения получил название «принципа Минковского — Хассе». Нашлись и продолжают еще встречаться задачи, для которых он дает результат: задача имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда она разрешима по любому модулю. Тем бо́льшим разочарованием было нахождение примеров, где этот принцип не работает. Одним из первых примеров такого рода (но не самым первым хронологически) оказался пример, найденный норвежским математиком Зельмером. Уравнение $3x^3+4y^3+5z^3=0$ оказалось разрешимым по любому модулю (и, конечно, в вещественных числах), но неразрешимым в целых числах (отличных одновременно от нуля). Этот пример послужил отправной точкой многих исследований по диофантовым уравнениям (то есть уравнениям в целых числах) последних 15 лет. Следует только сказать, что за это время число неясных вопросов и гипотез сильно увеличилось, а истинные корни того, что на самом деле происходит, не прояснились.

Расстояния между рациональными числами

Важнейшим современным достижением в теории чисел явилось новое понимание того, что означают «вычисления по модулю». Для простоты от целых чисел перейдем к рациональным. (Этот переход часто делается безболезненно — так, очевидным образом связаны между собой решения уравнения $x^n+y^n=z^n$ в целых числах с решениями уравнения $x^n+y^n=1$ в рациональных.) Ясно, что, если мы хотим решить уравнение в рациональных числах, мы должны узнать, решается ли оно в вещественных числах. Эту разрешимость проверять гораздо проще: можно извлекать различные корни, логарифмировать, писать неравенства и т. п.

Но вспомним, как же получились вещественные числа из рациональных? Одна из точек зрения такова: можно рассматривать последовательности рациональных чисел, расстояние между соседними членами которых неограниченно уменьшается. Например, 1; 1,4; 1,41; 1,4142;... Такая последовательность (которую можно представлять себе как последовательность измерений с возрастающей точностью) и определяет вещественное число. Как же измеряется отклонение друг от друга соседних членов последовательности? Если последовательность записать так: a_1; a_2; a_3;..., то расстояние между двумя членами запишется как $|a_m-a_n|$. Таким образом, основой для получения вещественных чисел из рациональных служит расстояние, определенное как абсолютная величина разности. Обозначим расстояние между двумя числами так: $d(a, b)=|b-a|$. Попробуйте вывести следующие свойства расстояния*):

1) $d(a, b)\geqslant 0$, причем $d(a, b)=0 \Rightarrow a=b$;

2) $d(a, b)=d(b, a)$;

3) $d(a, c)\leqslant d(a, b)+d(b, c)$ (неравенство треугольника);

4) $d(a+c, b+c)=d(a, b)$;

5) $d(ab, 0)=d(a, 0)\cdot d(b, 0)$.

Оказалось, что, кроме обычной абсолютной величины, у рациональных чисел есть еще много других расстояний, обладающих свойствами 1—5. Зафиксируем произвольное простое число p. Всякое рациональное число a (кроме нуля) можно представить в виде $a=p^{\nu}\cdot r$, где $\nu=\nu(a)$ — целое число, а рациональное число $r=r(a)$ таково, что в записи его в

*) Первые три из этих свойств — основные, которым удовлетворяет обычное расстояние на плоскости и в пространстве; это — аксиомы, которым должна удовлетворять любая «метрика» (см. статью Н. Б. Васильева «Метрические пространства» в «Кванте» № 10, 1970). Четвертое и пятое свойства связывают расстояние с операциями сложения и умножения чисел. Про метрику, которая им удовлетворяет, говорят, что она является *метрикой поля* (например, $d(b, a)=|b-a|$ — метрика поля вещественных чисел).

виде несократимой дроби ни в числитель, ни в знаменатель не входит p. (Заметим, что $\nu(a)$ может быть и нулем, и отрицательным целым числом. Например, если $p=3$, $a = \frac{73}{324} = 3^{-4}\cdot\frac{73}{4}$, то $\nu(a) = -4$.) Возьмем теперь произвольное положительное число $\lambda<1$. Определим расстояние d_p так: $d_p(a,b) = \lambda^{\nu(a-b)}$, если $a\neq b$, и $d_p(a, a) = 0$. Нетрудно проверить (попробуйте это сделать самостоятельно), что все свойства расстояния будут выполнены.

Раз есть новое расстояние, то можно попробовать получить новые числа, строя последовательности рациональных чисел a_1, a_2,... так, чтобы расстояния между соседними уменьшались. Это означает, что $\lambda^{\nu(a_{n+1}-a_n)}$ при увеличении n должно становиться все меньше и меньше и стремиться к нулю, а тогда $\nu(a_{n+1}-a_n)$ должно расти.

В итоге получим новые числа, которые называют p-адическими *). Они очень похожи на вещественные. Так же легко, как и для вещественных чисел, исследуются вопросы, когда можно извлечь корень, логарифмировать и делать другие операции над p-адическими числами. Задача же о разрешимости уравнений по модулю степеней данного простого числа заменится задачей о разрешимости его в p-адических числах.

Возникает вопрос, нашли ли мы **все** расстояния между рациональными числами. Оказывается, что да. Есть знаменитая теорема Островского (с ней можно познакомиться в цитированной выше книге по теории чисел), показывающая, что все расстояния исчерпываются обычной абсолютной величиной и введенными нами p-адическими расстояниями для каждого простого p.

Мы как бы уравняли в правах поведение уравнения по модулю отдельно взятого простого числа и его степеней, с одной стороны, и поведение его в обычных вещественных числах — с другой. В том и в другом случае числа сравниваются по их расстоянию друг от друга, но эти расстояния выбираются по-разному. (Теперь мы видим, чем похожи второе и третье решения задачи, с которой началась наша статья.)

Понимание этого факта сильно обогатило теорию чисел, снова привело в нее мощные методы теории функций и геометрии, развитые прежде для обычных вещественных чисел, но успешно применяемые и для p-адических чисел, сделало эту самую древнюю ветвь математики вновь одной из самых цветущих.)

*) Легко доказать, что выбор λ на построение и свойства p-адических чисел не влияет. Можно, если угодно, всюду считать, что $\lambda = \frac{1}{2}$ или $\lambda = \frac{1}{p}$.

Упражнения

1. Докажите, что ни одно из уравнений

а) $x^2+y^2=1971$,

б) $19x^3-17y^3=50$,

в) $3x^2-y^2=5^z$,

г) $x^3+y^3+7z=3$

не имеет решений в целых числах.

2. Докажите, что из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 нельзя составить двух различных семизначных чисел, из которых одно делится на другое. (В каждом числе должны быть использованы все цифры.)

3. Докажите, что число, десятичная запись которого состоит из тридцати единиц, некоторого количества нулей и некоторого количества девяток, не является полным квадратом.

4. Найдите 5-адическое расстояние (то есть расстояние d_5) между числами: а) 0 и $\frac{2}{5}$; б) $1\frac{31}{45}$ и $6\frac{2}{15}$; в) 6 и 631.

5. Докажите, что для 3-адических чисел верно равенство

$$1+3+9+27+\ldots = -\frac{1}{2}$$

(другими словами, последовательность расстояний

$$\alpha_n = d_3\left(1+3+\ldots+3^n, -\frac{1}{2}\right)$$

стремится к нулю).

Чему равна сумма $1+3^2+3^4+3^6+\ldots$?

6. Назовем p-ичной дробью, по аналогии с десятичными дробями, дробь вида $\frac{A}{p^n}$, где A — натуральное число. Ее можно записать в таком виде:

$$a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \ldots + a_0 + \frac{a_{-1}}{p} + \frac{a_{-2}}{p^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{p^n}, \quad (*)$$

где каждое a_i — целое число, $0 \leqslant a_i < p$.

Коротко дробь (*) можно записать так:

$$\ll a_m a_{m-1} \ldots a_0,\ a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \gg. \quad (**)$$

Докажите, что расстояние d_p между двумя такими p-ичными дробями, у которых k-е цифры различны, а все следующие вправо (то есть $(k-1)$-я, $(k-2)$-я и т. д.) совпадают, равно λ^k.

Представьте в стандартном виде (**) троичные дроби $4\frac{14}{81}$ и $1\frac{41}{81}$ и найдите 3-адическое расстояние между ними.

7. (Продолжение.) Пусть a_{-n}, $a_{-n+1}, \ldots, a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная последовательность цифр; $0 \leqslant a_i < p$. Предел (в смысле расстояния d_p) последовательности p-ичных дробей

$$x_0 = \ll a_0,\ a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \gg,$$

$$x_1 = \ll a_1 a_0,\ a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \gg$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = \ll a_m \ldots a_1 a_0,\ a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \gg$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

коротко обозначается так *):

$$\ll \ldots a_3 a_2 a_1 a_0,\ a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \gg. \quad (***)$$

В частности, если $n=0$, то есть все цифры после запятой равны нулю, мы пишем просто

$$\ll \ldots a_3 a_2 a_1 a_0 \gg.$$

Например, из результата задачи 5 следует, что при $p=3$

$$-\frac{1}{2} = \ll \ldots 11111 \gg; \quad -\frac{1}{8} = \ll \ldots 01010101 \gg;$$

$$\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} = \ll \ldots 11111{,}2 \gg.$$

Представьте в виде (***) 3-адические числа

$$-1;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{5};\ \frac{2}{45}.$$

Тем, кого заинтересовала теория этих чисел, «бесконечных влево», мы рекомендуем книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского «Математические беседы» (серия «Библиотека математического кружка»).

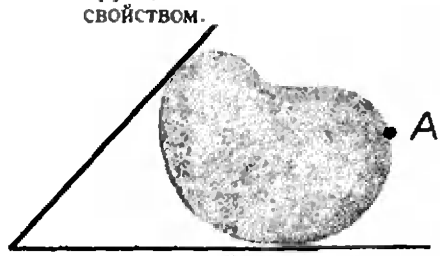
*) Можно доказать, что этот предел в p-адических числах всегда существует; оказывается, что любое p-адическое число можно записать такой «p-ичной дробью, бесконечной в л е в о» — точно так же, как любое положительное в е щ е с т в е н н о е число можно записать дробью, бесконечной в п р а в о.

ОБ ОДНОЙ НЕРЕШЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ

В этом номере «Кванта» вы прочтете статью Б. Ю. Когана «Удивительные катки». В ней рассматриваются фигуры, которые могут поворачиваться между двумя параллельными прямыми, все время касаясь их обеих.

Нетрудно понять, что любая ограниченная фигура может, поворачиваясь, касаться двух пересекающихся прямых.

Зафиксируем на плоскости точку A и рассмотрим все фигуры, которые, поворачиваясь, касаются данных прямых, причем их граница проходит через точку A (см. рис.). До сих пор неизвестно, существуют ли фигуры, отличные от круга, обладающие таким свойством.



Эта проблема была поставлена около 15 лет назад академиком А. Н. Колмогоровым на лекции для московских школьников. Ее решение имеет и практическое значение. На некоторых заводах производят проверку цилиндрических деталей следующим образом: деталь укладывают в лоток и вращают так, чтобы она касалась обеих сторон лотка, затем сверху подводится «щуп» (стержень, который может совершать продольные перемещения) до соприкосновения с деталью. Если во время вращения щуп сдвигается, то деталь бракуется.

Таким образом, если существуют отличные от круга фигуры, удовлетворяющие условиям задачи, то цилиндры, имеющие в сечении такую фигуру, будут великолепно проходить через ОТК.

А. П. Савин

УДИВИТЕЛЬНЫЕ КАТКИ

Б. Ю. Коган

Доска движется на круглых катках. При этом она сохраняет горизонтальное положение и остается на той же высоте. Почему это происходит? Да потому, что окружность имеет одну и ту же ширину при любом повороте.

А будет ли доска двигаться так же, если воспользоваться некруглыми катками? В первый момент кажется, что это невозможно. Не будем, однако, спешить. Оказывается, есть кривые, которые, подобно окружности, имеют одинаковую ширину во всех направлениях. Они так и называются линиями одинаковой ширины.

Одна из простейших кривых такого рода показана на рисунке 1. Она состоит из дуг A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 радиуса r и дуг B_1A_3, B_3A_2, B_2A_1 радиуса R, центры которых находятся в вершинах правильного треугольника $O_1O_2O_3$. Легко видеть, что ширина этой кривой одинакова во всех направлениях и равна $R+r$. Следовательно, катки, профили которых очерчены по таким кривым, будут работать ничуть не хуже круглых (рис. 2).

Кривую, изображенную на рисунке 1, можно получить так. Возьмем отрезок A_1B_3 и, повернув его на 60° вокруг точки O_1, переведем в положение B_1A_2. Затем, повернув отрезок B_1A_2 на 60° вокруг точки O_2, получим отрезок A_3B_2 и, наконец, повернув отрезок A_3B_2 на 60° вокруг точки O_3, вновь придем к отрезку A_1B_3. В процессе этих поворотов один конец рассматриваемого отрезка опишет дугу $A_1B_1A_3B_3$, а другой — дугу $B_3A_2B_2A_1$. Следовательно, кривую, показанную на рисунке 1, можно рассматривать как траекторию, описываемую концами некоторого

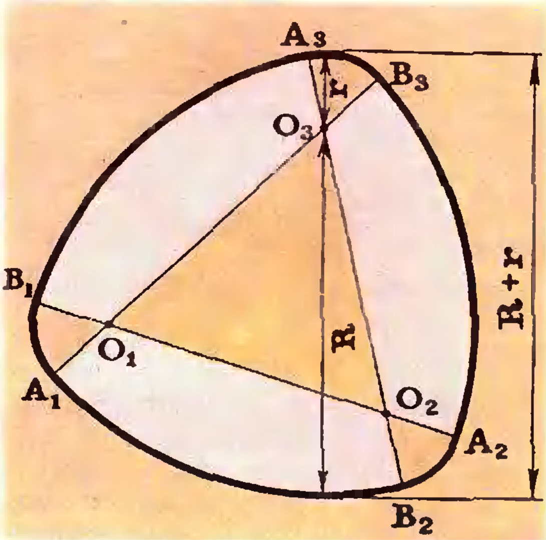


Рис. 1.

отрезка при трех поворотах вокруг точек, лежащих на этом отрезке. Пользуясь этим методом, можно получить много кривых подобного рода. Например, кривая, показанная на рисунке 3, образуется в результате поворотов отрезка AB вокруг центров O_1, O_2, O_3. Величина и направление каждого поворота показаны стрелками. Цифры на рисунке показывают длины соответствующих отрезков.

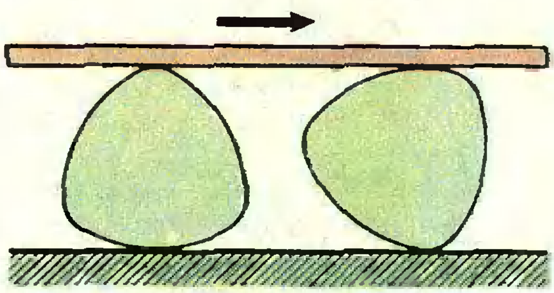


Рис. 2.

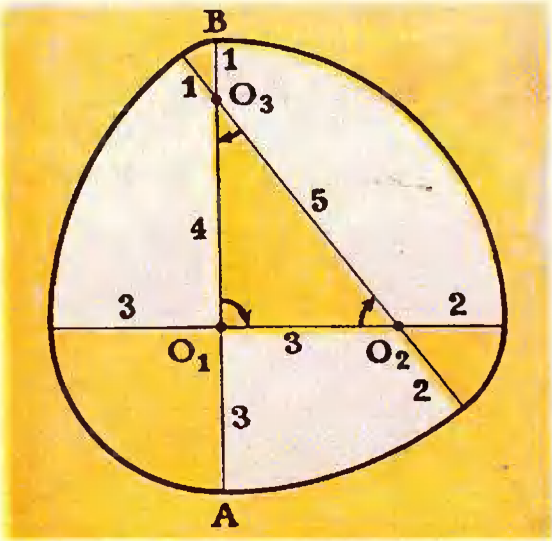


Рис. 3.

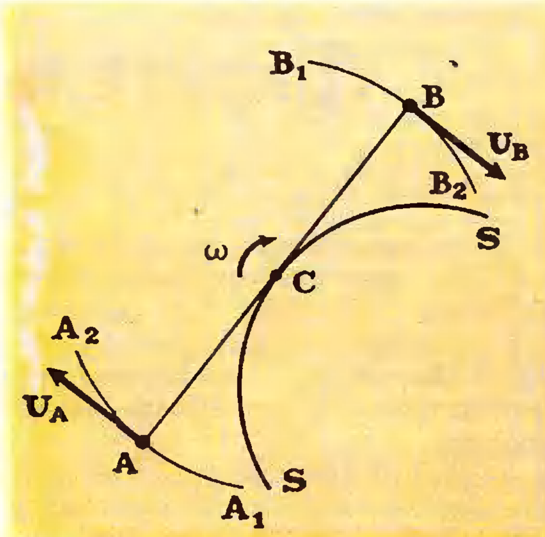


Рис. 5.

Ширина всех этих кривых постоянна и равна длине поворачиваемого отрезка. Можно поворачивать отрезок вокруг одного из его концов. Так мы получим простейшую кривую равной ширины, отличную от окружности (рис. 4). При этом отрезок AB поворачивается сначала вокруг точки A, переходя в положение AB', затем вокруг точки B', переходя в отрезок $B'B$, и, наконец, вокруг точки B, замыкая кривую.

Рассмотрим теперь некоторый отрезок AB. Пусть он катится без скольжения по кривой SS. Тогда в каждый

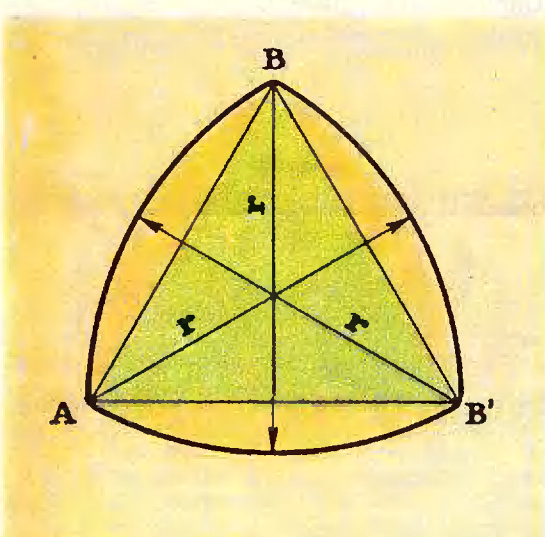


Рис. 4

отдельный момент такое движение можно рассматривать как вращение отрезка относительно точки касания. Точка касания, относительно которой в данный момент совершается поворот, называется мгновенным центром вращения (например, точка C на рисунке 5).

Представление о мгновенном центре вращения позволяет легко вычислять скорости различных точек отрезка AB. Например, для скоростей точек A и B будем иметь

$$v_A = \omega \cdot CA,$$
$$v_B = \omega \cdot CB,$$

где ω — угловая скорость отрезка AB в его «мгновенном» вращении вокруг центра C. При этом скорости рассматриваемых точек будут перпендикулярны соответствующим радиусам вращения, то есть отрезкам CA и CB. Таким образом можно вычислить скорость любой точки, лежащей на этом отрезке или *жестко связанной* с этим отрезком. Если, например, с отрезком AB жестко связана некоторая фигура, то скорость любой ее точки P равна произведению $\omega \cdot CP$.

Вернемся теперь к кривым постоянной ширины. Пусть отрезок AB катится по кривой SS. Так как скорости v_A и v_B перпендикулярны радиусам CA и CB, то они параллельны между собой. Но скорость v_A направ-

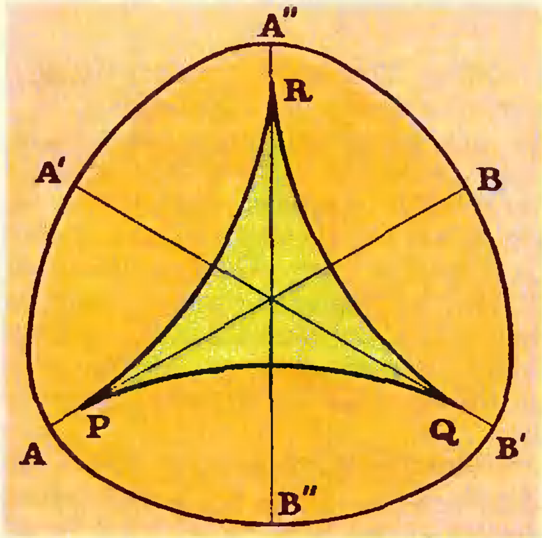


Рис. 6.

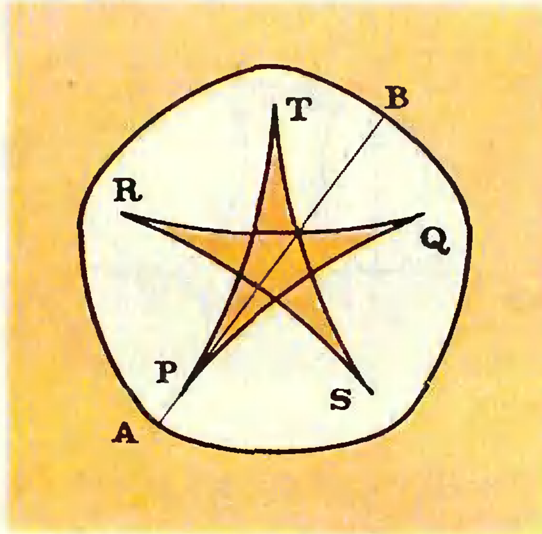


Рис. 7.

лена по касательной к траектории точки A, а скорость v_B — по касательной к траектории точки B. Следовательно, эти касательные *параллельны друг другу, и расстояние между ними все время остается равным* AB. Но это значит, что траектории A_1A_2 и B_1B_2 можно рассматривать как *участки некоторой кривой постоянной ширины.*

Однако нам нужно построить не два участка, а всю такую кривую. Если мы хотим сделать это с помощью описываемой операции, то должны выбрать линию SS так, чтобы, обкатывая ее, отрезок AB повернулся на 180°, то есть чтобы точка A пришла в положение B, а точка B — в положение A. Одна из таких линий — $PQRP$ — показана на рисунке 6. Проследим более подробно, как отрезок AB обкатывает ее.

Сначала он катится по участку PQ и приходит в положение $A'B'$. При этом его концы описывают дуги AA' и BB'. Затем он катится по участку QR, а его концы описывают дуги $A'A''$ и $B'B''$. Наконец, он обкатывает участок RP, а его концы движутся по дугам $A''B$ и $B''A$. В результате точка A приходит в положение B, а точка B—в положение A, и кривая постоянной ширины замыкается. При этом дуги PQ, QR и RP могут иметь любую форму и не обязательно должны быть одинаковыми. Единственное, что от них требуется, — это чтобы они были выпуклыми и касались друг друга так, как это показано на рисунке. Что касается отрезков AP и PB, то их длина не может быть произвольной, ибо тогда дуга, описываемая точкой A, не «вольется» в дугу, описываемую точкой B. Здесь можно поступить следующим образом. Проведем через точку P прямую, касающуюся дуги PQ, и поставим на ней точку A. Заставим теперь эту прямую обкатывать линию $PQRP$. Тогда конец дуги, которую опишет при этом точка A, определит положение точки B.

Линия $PQRP$, показанная на рисунке 6, состоит из трех дуг. Но число дуг может быть и бо́льшим. Например, на рисунке 7 изображена кривая постоянной ширины, полученная при обкатывании линии $PQRSTP$, состоящей из пяти дуг.

Кривые постоянной ширины обладают еще одним свойством, роднящим их с окружностью. Оно выражается следующей теоремой:

Периметр кривой постоянной ширины $l=\pi D$, где D — ширина этой кривой.

Докажем эту теорему.

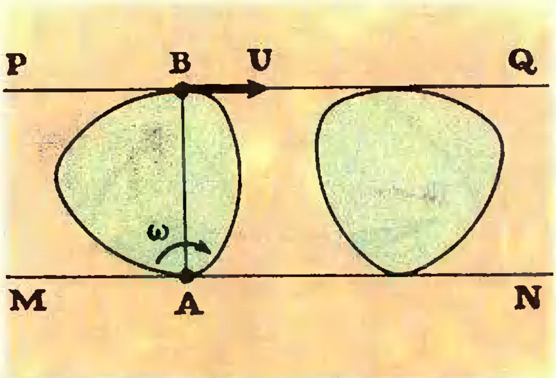


Рис. 8.

Пусть горизонтальная прямая PQ перемещается с помощью катков постоянной ширины (рис. 8). Рассмотрим один из этих катков, например левый. Пусть его ширина равна D, а периметр — l. Когда прямая PQ передвинется настолько, что этот каток сделает один оборот, он сместится относительно прямой MN на расстояние l вправо. Но так как он катится не только по прямой MN, но и по прямой PQ, то после одного оборота он окажется *смещенным относительно прямой* PQ на расстояние l *влево*. Следовательно, перемещение прямой PQ относительно прямой MN будет равно $2l$.

Но так как это же смещение равно vt, где t — время, за которое каток делает один оборот, то

$$2l = vt. \quad (1)$$

(Мы считаем, что прямая PQ движется с постоянной скоростью.) Мгновенный центр вращения катка находится в точке A, значит, скорость перемещения

$$v = \omega \cdot AB = \omega D,$$

где ω — угловая скорость катка. Подставив это выражение в равенство (1), получим

$$2l = \omega D t. \quad (2)$$

Но ωt есть угол поворота катка за один оборот. Следовательно,

$$\omega t = 2\pi,$$

и равенство (2) приобретает вид

$$2l = 2\pi D,$$

откуда

$$l = \pi D.$$

Таким образом, периметр кривой постоянной ширины вычисляется так же, как периметр окружности. А какова площадь, ограниченная кривой постоянной ширины? Можно ли ее вычислять так же, как площадь круга? Оказывается, нет. Однако площадь *кольца* постоянной ширины можно вычислять, как площадь *кольца между двумя концентрическими окружностями*. Более точно это означает следующее.

Рассмотрим кривую постоянной ширины (рис. 9). Через произвольную точку C на ней проведем нормаль (нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной) и отложим вдоль нее отрезок CC' заданной длины d. Отложив такие отрезки от каждой точки данной кривой, получим новую кривую, являющуюся геометрическим местом концов отложенных отрезков. Очевидно, она тоже будет иметь постоянную ширину. Если теперь обозначить через S площадь, заключенную между этими кривыми, то будет справедливо равенство

$$S = \frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi D_1^2}{4},$$

где D_1 — ширина внутренней кривой, а D_2 — наружной.

Попробуйте доказать это сами.

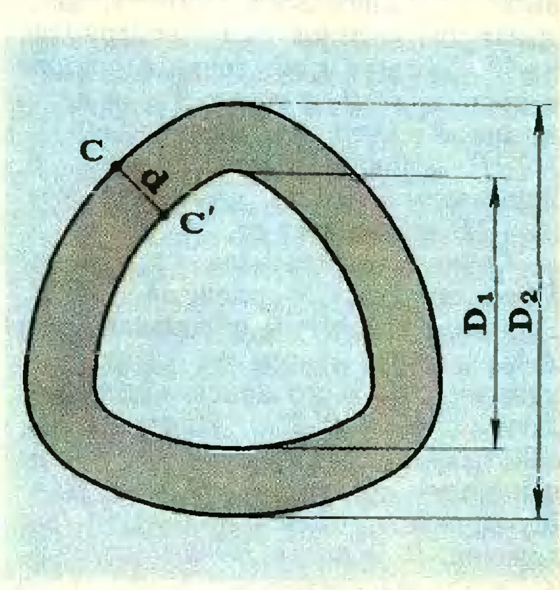


Рис. 9.

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Л. М. Лоповок

По определению выпуклый многоугольник называется правильным, если он равноугольный и равносторонний. Однако существует интересный класс фигур, не обладающих этими двумя свойствами одновременно. Мы будем называть полуправильными следующие многоугольники:

а) равноугольные, у которых стороны равны через одну;

б) равносторонние, у которых углы равны через один.

Примером полуправильного многоугольника первого рода является прямоугольник, а второго — ромб. Из описания полуправильных многоугольников видно, что у каждого из них четное число вершин; обозначим его через $2n$.

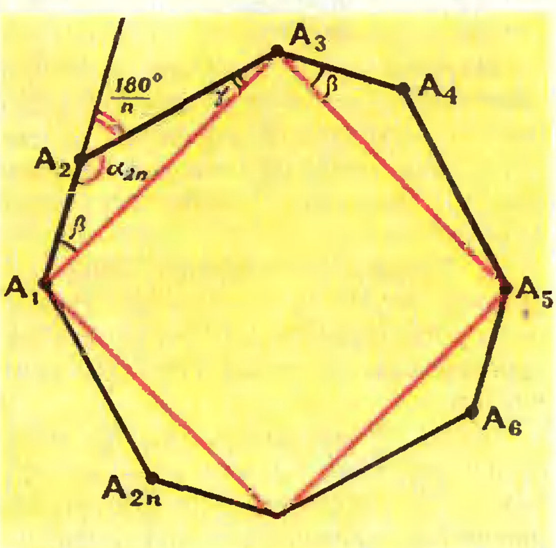


Рис. 1.

Свойства полуправильных равноугольных многоугольников

1. Противоположные стороны равноугольного многоугольника параллельны.

Действительно, выполняя обход многоугольника, замечаем, что каждая сторона повернута относительно предыдущей на внешний угол, то есть на $\frac{180^\circ}{n}$ (рис. 1). Следовательно, сторона $A_{n+1}A_{n+2}$ повернута относительно стороны A_1A_2 на сумму n внешних углов, то есть на 180°.

2. Если соединить вершины полуправильного равноугольного многоугольника через одну (все нечетные или все четные вершины), то получится правильный многоугольник (рис. 1).

Доказательство несложно: треугольники $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, $A_5A_6A_7, \ldots$ равны по первому признаку, значит, $A_1A_3 = A_3A_5 = \ldots$ С другой стороны, из равенства треугольников следует равенство их соответственных углов. Обозначим внутренний угол правильного $2n$-угольника через α_{2n}. Находим внутренние углы получившегося у нас многоугольника: они равны

$$\alpha_{2n} - (\beta + \gamma) = \alpha_{2n} - (180^\circ - \alpha_{2n}) = 2\alpha_{2n} - 180^\circ = 2\cdot 180^\circ\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 180^\circ = 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right),$$

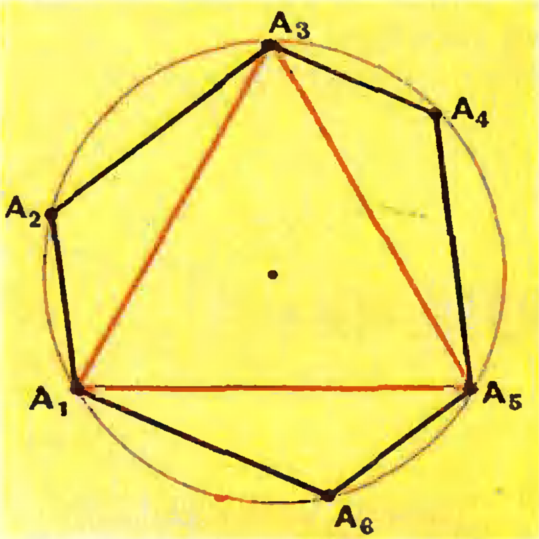


Рис. 2.

как и должно быть у правильного n-угольника.

3. Около полуправильного равноугольного многоугольника можно описать окружность.

Опишем окружность около правильного n-угольника $A_1A_3A_5$... (рис. 2). Внутренний угол равноугольного $2n$-угольника равен $180° \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Легко подсчитать, что $\angle A_1A_2A_3$ вдвое меньше градусной величины дуги $A_3A_5A_1$, значит, точка A_2 лежит на построенной окружности. Это относится и к другим вершинам: A_4, A_6,...

На свойстве 3 основаны два способа построения полуправильных равноугольных многоугольников.

а) Строим правильный n-угольник $A_1A_3A_5...A_{2n-1}$, описываем около него окружность. Затем находим (с помощью циркуля) на окружности точки A_2, A_4, A_6,..., A_{2n}, удаленные на одно и то же расстояние от соответствующих вершин n-угольника: $A_1A_2 = A_3A_4 = ...$

б) Строим треугольник $A_1A_2A_3$ по двум сторонам (произвольной длины) и известному углу между ними, описываем около этого треугольника окружность. Затем, зная размеры всех сторон, засечками циркуля последовательно находим остальные вершины.

4. Если число вершин полуправильного равноугольного многоугольника кратно 4, то большие диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

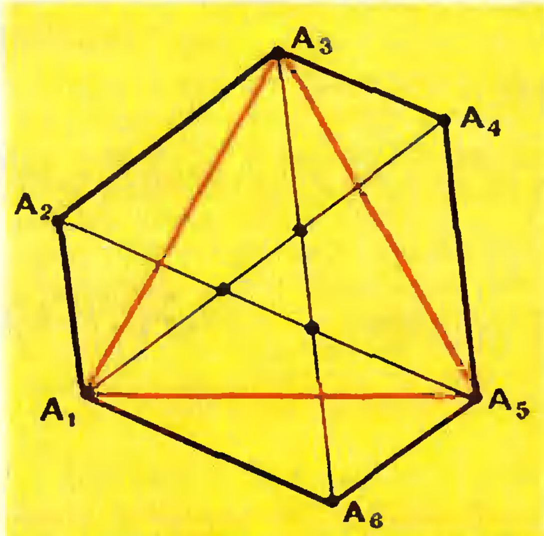


Рис. 3.

Для доказательства используем свойство 2: эти диагонали являются также диагоналями правильного многоугольника с четным числом сторон, поэтому они пересекаются в одной точке — центре описанной около многоугольника окружности — и делятся этой точкой пополам.

Если же число вершин полуправильного равноугольного многоугольника не кратно 4, то нетрудно построить пример (рис. 3), когда большие диагонали пересекаются в нескольких точках.

5. Центр окружности, описанной около полуправильного равноугольного $4n$-угольника, является его центром симметрии.

Из свойства 4 следует, что при центральной симметрии относительно центра окружности вершины многоугольника переходят в вершины; следовательно, стороны тоже переходят в стороны.

6. Прямая, проходящая через середины двух параллельных сторон полуправильного равноугольного многоугольника, является его осью симметрии.

По свойству параллельных хорд окружности эта прямая проходит через центр описанной окружности. Из равенства соответствующих хорд по обе стороны от прямой следует симметричность соответствующих вершин

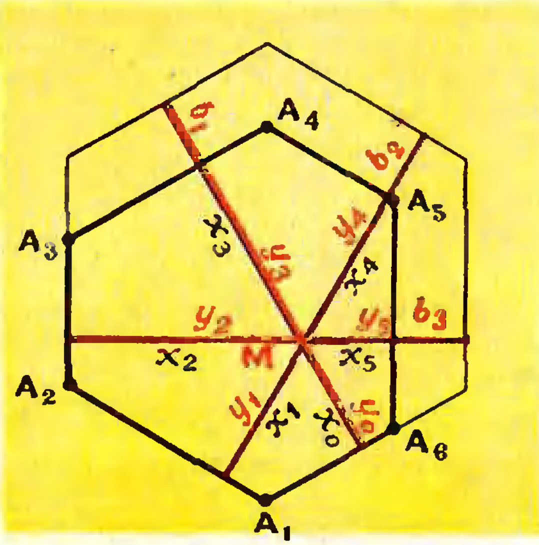


Рис. 4.

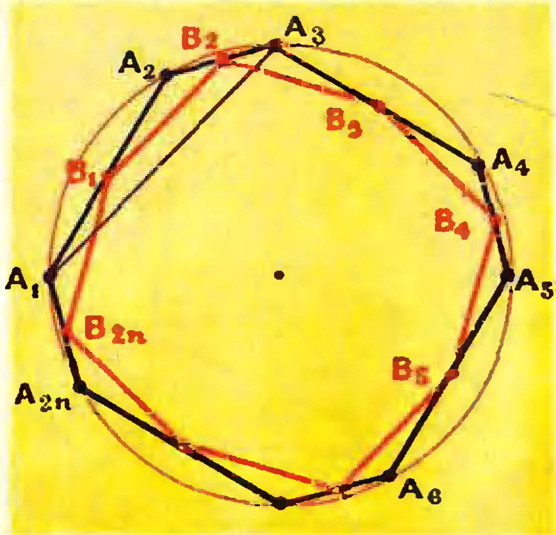


Рис. 5.

многоугольника относительно проведенной прямой (см. далее рис. 6).

7. Пусть полуправильный равноугольный многоугольник имеет $2n$ вершин, тогда центр описанной около него окружности является его центром симметрии порядка n.

Это означает, что при повороте вокруг центра окружности на угол, кратный $\frac{360°}{n}$, многоугольник совмещается сам с собой. Это следует из свойств 2 и 3.

8. Сумма расстояний от внутренней точки до сторон (или их продолжений) полуправильного равноугольного многоугольника постоянна.

Как известно, таким свойством обладает правильный многоугольник.

Если соединить внутреннюю точку правильного многоугольника с вершинами, то сумма площадей полученных треугольников равна площади многоугольника. Обозначив сторону многоугольника через a, а расстояния до сторон через x_0, x_1, x_2, $x_3, \ldots$, получим

$$S=\frac{ax_0}{2}+\frac{ax_1}{2}+\frac{ax_2}{2}+\frac{ax_3}{2}+\cdots;$$

$$x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots=$$

$$=\frac{2S}{a}=\text{const}.$$

Пусть в данном многоугольнике сторона A_1A_2 больше стороны A_2A_3. Построим на A_1A_2 правильный $2n$-угольник (рис. 4). Тогда все стороны исходного многоугольника (кроме трех) соответственно параллельны сторонам правильного многоугольника, а три (A_1A_2 и смежные с ней) лежат на сторонах правильного многоугольника. Следовательно, расстояния от внутренней точки M до сторон правильного многоугольника таковы:

$$x_0=y_0,\quad x_1=y_1,\quad x_2=y_2,\quad x_3=y_3+b_1,$$
$$x_4=y_4+b_2,\quad x_5=y_5+b_3,\ldots,$$

где b_1, b_2, b_3 постоянны, а искомая сумма

$$y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots=(x_0+x_1+$$
$$+x_2+x_3+x_4+\ldots)-(b_1+b_2+\ldots)=$$
$$=\text{const}.$$

9. Если последовательно соединить середины сторон полуправильного равноугольного многоугольника, то получится полуправильный равносторонний многоугольник.

Действительно, по свойству 2 все малые диагонали полуправильного равноугольного многоугольника равны между собой. Стороны полученного многоугольника (рис. 5) вдвое меньше этих диагоналей, так как являются средними линиями треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5, \ldots$ Используя свойство 7, легко устано-

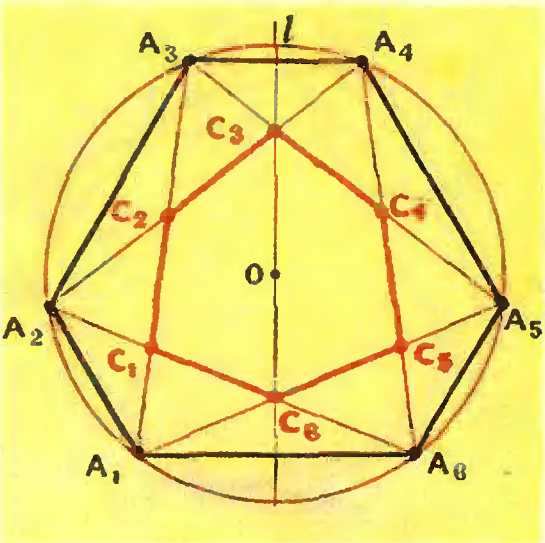


Рис. 6.

вить, что углы этого многоугольника равны через один.

10. Точки пересечения малых диагоналей полуправильного равноугольного многоугольника образуют полуправильный равносторонний многоугольник.

Это свойство следует из свойств 6 и 7. При отражении относительно прямой l (рис. 6) исходный многоугольник переходит в себя, следовательно, треугольник $A_3C_3C_2$ совмещается с треугольником $A_4C_4C_3$, откуда $C_2C_3=C_3C_4$; аналогичные равенства справедливы и для остальных сторон. Равенство углов через один у многоугольника $C_1C_2C_3C_4\ldots$ легко выводится из свойства 7 или из теоремы о том, что угол между двумя хордами равен полусумме соответствующих дуг.

11. Сумма квадратов расстояний от любой точки описанной окружности до вершин полуправильного равноугольного $2n$-угольника равна $4nR^2$.

Мы докажем свойство 11 лишь для четных n. При этом достаточно заметить, что A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, $A_3A_{n+3}, \ldots$ — диаметры описанной окружности; поэтому для любой точки M этой окружности $MA_1^2+MA_{n+1}^2=$ $=MA_2^2+MA_{n+2}^2=\ldots=4R^2$.

12. Площадь полуправильного равноугольного $2n$-угольника со сторонами $A_1A_2=a$ и $A_2A_3=b$ равна

$$\frac{n}{2}ab\sin\frac{180^\circ}{n}+\frac{n}{4}\left(a^2+b^2+2ab\cos\frac{180^\circ}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Эта площадь равна сумме площадей правильного n-угольника и n треугольников, равных $A_1A_2A_3$. Мы уже нашли, что $\angle A_1A_2A_3=180^\circ-\frac{180^\circ}{n}$ (при доказательстве свойства 1); теперь

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Площадь правильного n-угольника $A_1A_3A_5\ldots A_{2n-1}$ равна

$$n\cdot\frac{A_1A_3}{2}\cdot\frac{A_1A_3}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}=$$
$$=\frac{n}{4}(A_1A_3)^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

По теореме косинусов для треугольника $A_1A_2A_3$

$$A_1A_3^2=a^2+b^2+2ab\cos\frac{180^\circ}{n},$$

и окончательно

$$S=\frac{n}{2}ab\sin\frac{180^\circ}{n}+\frac{n}{4}\left(a^2+b^2+2ab\cos\frac{180^\circ}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Например, площадь полуправильного равноугольного шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+4ab)$, а восьмиугольника — $a^2+b^2+2\sqrt{2}\,ab$.

Самостоятельно докажите следующие свойства полуправильных равносторонних многоугольников.

1. Если число вершин полуправильного равностороннего многоугольника кратно 4, то его противоположные стороны параллельны.
2. Если соединить вершины полуправильного равностороннего многоугольника через одну, то получится правильный многоугольник.
3. В полуправильный равносторонний многоугольник можно вписать окружность.

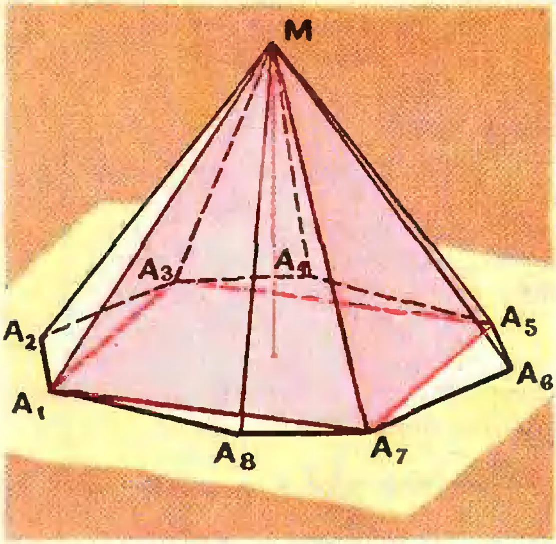


Рис. 7.

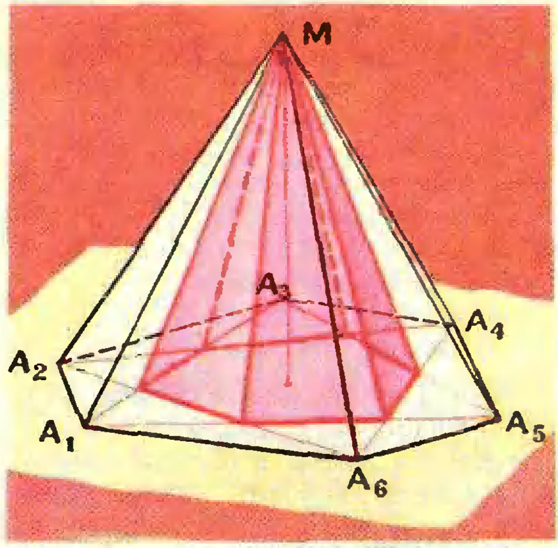


Рис. 8.

4. Большие диагонали полуправильного равностороннего многоугольника пересекаются в одной точке.

5. Центр окружности, вписанной в полуправильный равносторонний $4n$-угольник, является его центром симметрии.

6. Большие диагонали полуправильного равностороннего многоугольника являются его осями симметрии.

7. Пусть полуправильный равносторонний многоугольник имеет $2n$ вершин, тогда центр вписанной в него окружности является его центром симметрии порядка n.

8. Сумма расстояний от внутренней точки до сторон полуправильного равностороннего многоугольника постоянна.

9. Если последовательно соединить середины сторон полуправильного равностороннего многоугольника, то получится полуправильный равноугольный многоугольник.

10. Точки пересечения малых диагоналей полуправильного равностороннего многоугольника образуют полуправильный равноугольный многоугольник.

11. Посмотрите еще раз свойство 11 полуправильного равноугольного многоугольника и попробуйте найти его аналог для полуправильного равностороннего многоугольника.

12. Площадь полуправильного равностороннего $2n$-угольника со стороной a и одним из углов β равна

$$S = \frac{n}{2} a^2 \left[\sin\beta + (1 - \cos\beta) \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \right].$$

Полуправильные пирамиды

Пирамиду, у которой равны все боковые ребра, а плоские углы при вершине равны через один, назовем полуправильной равнореберной пирамидой.

Пирамиду, у которой плоские углы при вершине одинаковы, а боковые ребра равны через одно, назовем полуправильной равноугольной пирамидой.

Свойства таких пирамид получаются из свойств полуправильных многоугольников. Мы их сформулируем, а вы попробуйте доказать эти свойства самостоятельно.

1. Основанием полуправильной равнореберной пирамиды является полуправильный равноугольный многоугольник.

2. Малые диагональные сечения MA_1A_3, MA_3A_5, MA_5A_7, ... полуправильной равнореберной пирамиды ограничивают правильную пирамиду (рис. 7).

3. Около полуправильной равнореберной пирамиды можно описать сферу.

4. Если число вершин основания полуправильной равнореберной пирамиды кратно 4, то большие диагональные сечения пирамиды пересекаются по высоте, опущенной на ее основание.

5. Плоскость, проходящая через середины двух параллельных сторон основания и вершину полуправильной равнореберной пирамиды, перпендикулярна плоскости основания.

6. Малые диагональные сечения MA_1A_3, MA_2A_4, MA_3A_5,... полуправильной равнореберной пирамиды ограничивают полуправильную равноугольную пирамиду (рис. 8).

Рассмотрите еще пирамиду, у которой боковые ребра равны через одно и плоские углы при вершине равны через один. Какие из свойств полуправильных пирамид сохраняются для такой пирамиды?

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М71. Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов заполнена числами. Переставим числа в каждой строке в порядке возрастания. Докажите, что если после этого переставить числа в каждом столбце в порядке возрастания, то в каждой строке они по-прежнему будут стоять в порядке возрастания.

Подумайте, что будет, если действовать в другом порядке: в первоначальной таблице сначала переставить числа по возрастанию в столбцах, а потом — в строках: получится ли в результате та же самая таблица, что и в первом случае, или другая?

М72. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p,$$

где p — произвольное вещественное число.

Ю. И. Ионин

М73. На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (причем все такие возможности мы считаем равновероятными), окажется, что угаданы ровно 4 клетки? 5 клеток?... все 8 клеток?

М74. Многочлен p обладает таким свойством: для некоторого числа a

$$p(x)=p(a-x).$$

Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. Например, если $p(x)=x^5+(1-x)^5$, то, очевидно, $p(x)=p(1-x)$ и, как нетрудно проверить,

$$p(x)=5y^2+\frac{5}{2}y+\frac{1}{16},$$

где $$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

М75. а) Доказать, что в любом выпуклом многограннике сумма длин всех ребер больше утроенного диаметра. (Диаметром многогранника называется наибольшая из длин всевозможных отрезков с концами в вершинах многогранника.)

б) Доказать, что для любых двух вершин A и B выпуклого многогранника найдутся три ломаные, каждая из которых идет по ребрам многогранника из A в B и никакие две не проходят по одному ребру.

в) Доказать, что если в выпуклом многограннике разрезать два ребра, то для любых двух его вершин A и B найдется ломаная, идущая из A в B по оставшимся ребрам.

г) Доказать, что в задаче б) можно выбрать три ломаные, попарно не имеющие общих вершин, за исключением концов A и B.

А. Г. Кушниренко

Ф83. Доска массы m и длины l лежит на горизонтальном полу. Коэффициент трения доски о пол равен k. Какую работу надо совершить для того, чтобы повернуть доску в горизонтальной плоскости на малый угол α вокруг одного из ее концов?

Ф84. «Черный ящик» (коробка с неизвестной схемой внутри) имеет две пары выводов Если к выводам I приложить напряжение U, то

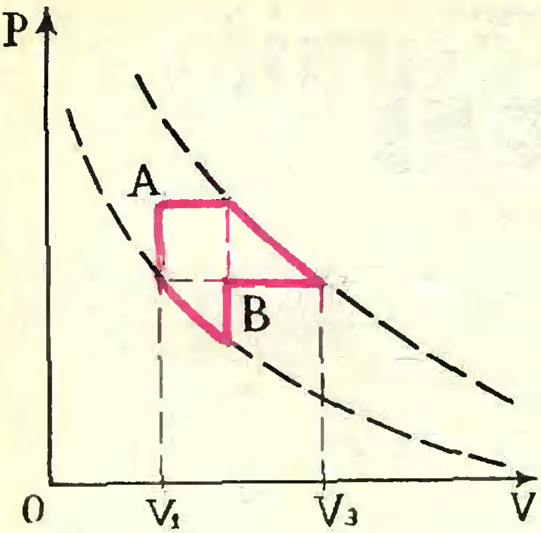


Рис. 1.

вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, подсоединенный к выводам II, покажет напряжение $\frac{U}{2}$. Если же подать напряжение U на выводы II, то вольтметр, подсоединенный к выводам I, покажет U. Какая электрическая схема находится в «ящике»?

С. Г. Семенчинский

Ф85. Можно ли провести с идеальным газом замкнутый процесс (цикл) так, чтобы точки A и B (рис. 1) лежали на одной изотерме?

Температуры T_1 и T_2, которым соответствуют изотермы, проведенные на рисунке, и объем V_1 (или V_3) заданы.

Б. Б. Буховцев

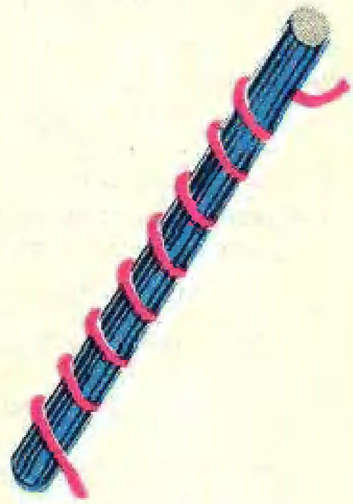
Ф86. В опыте Милликена положение капельки весом 10^{-6} *г* определяется микроскопом с точностью до 10 *мк*. Какова неточность в определении ее скорости?

Ф87. Источник сферических волн движется по поверхности воды со скоростью u. Нарисуйте картины волн на поверхности воды, когда скорость волн c больше и меньше скорости источника.

Л. Г. Асламазов

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Первые электромагниты появились вскоре после того, как Христиан Эрстед в 1820 году открыл магнитное действие электрического тока. Уже осенью того же 1820 года Ампер придумал безжелезный электромагнит — соленоид (название это тоже введено Ампером). Тремя годами позже малоизвестный английский преподаватель физики Стерджен придумал, изготовил и показывал на лекциях первый настоящий электромагнит в виде покрытого лаком железного стержня (см. рис.) с намотанной на нем проволокой. Лак служил электрической изоляцией. Как большое достижение отмечалось, что этим электромагнитом можно было удерживать несколько десятков граммов железа. Стердженом же был изготовлен и первый подковообразный электромагнит, которым можно было удерживать груз более 4 *кг*.



(Окончание на стр. 44.)

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

РЕШЕНИЯ

М26

Предположим, что в каждом номере нашего журнала в задачнике «Кванта» будет пять задач по математике. Обозначим через $f(x, y)$ номер первой из задач x-го номера журнала за y-й год (например, $f(6, 1970)=26$). Напишите общую формулу для $f(x, y)$ для всех x, y ($1\leqslant x\leqslant 12$, $y\geqslant 1970$). Решите уравнение $f(x, y)=y$.

Функция f удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(1,1970)=1$;

2) $f(x+1, y)=f(x,y)+5$ $(1\leqslant x<12)$ — за каждый месяц $f(x, y)$ увеличивается на 5;

3) $f(1, y+1)=f(1, y)+60$ — за каждый год $f(x, y)$ увеличивается на 60.

Ясно, что этими условиями функция однозначно определяется; ее можно задать, например, такой формулой:

$$f(x, y)=5x+60(y-1970)-4.$$

Нетрудно проверить, что $f(5,2003)=2001$; $f(6,2003)=2006$. Поэтому уравнение $f(x, y)=y$ не имеет решений.

Правильные решения прислали *Е. Орлюк* из Житомира, *Н. Ильин* из поселка Захар Иркутской обл., *М. Перельмутер* из Киева и другие читатели.

Из сказанного выше ясно, что если бы мы ввели еще такую функцию: $f(k, x, y)$ — номер k-й задачи x-го номера журнала за y-й год ($1\leqslant k\leqslant 5, 1\leqslant x\leqslant 12, y\geqslant 1970$), то уравнение $f(k, x, y)=y$ имело бы единственное решение $k=3$, $x=5$, $y=2003$ — другими словами, если наша система сохранится до тех пор неизменной (по-прежнему в каждом номере будет пять задач по математике), то третья задача в задачнике «Кванта» № 5 за 2003 год будет иметь номер **М2003**. Общая формула для $f(k, x, y)$ такова:

$$f(k, x, y)=k+5x+60(y-1970)-5.$$

Для читателей, пожалуй, полезнее формулы, задающие обратную функцию, которые по номеру n задачи позволяют найти год y и номер журнала x, в котором предлагалась эта задача.

Для этого удобно использовать такие обозначения: $[a]$ — целая часть числа a (наибольшее целое число, не превосходящее a) и $\{a\}=a-[a]$ — дробная часть числа a.

Проверьте, что

$$x=\left[12\left\{\frac{n-1}{60}\right\}\right]+1,\quad y=\left[\frac{n-1}{60}\right]+1970.$$

М27

Докажите, что если $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, то

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Это утверждение следует из такого тождества:

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

Для его доказательства достаточно почленно перемножить две суммы, стоящие в левой части тождества, и учесть, что сумма трех дробей

$$\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ca-ab}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ab-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=\frac{bc-ca}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

равна нулю.

Такое решение прислал *А. Шильштут* из Ташкента. Менее прозрачные, но тоже верные решения прислали *Б. Пагис* из Новомосковска Тульской области и *А. Избицкий* из Малориты Брестской области.

После прочтения такого искусственного решения, конечно, может возникнуть вполне резонный вопрос: а как догадаться, что данное выражение нужно умножить именно на $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$? Нельзя ли придумать общий способ рассуждения, позволяющий решать подобные задачи?

Более естественно было бы решать эту задачу так. Запишем данные выражения в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=$$
$$=\frac{p(a,b,c)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=$$
$$=\frac{q(a,b,c)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

(p будет многочленом третьей степени, а q — пятой). Мы должны доказать, что если $p(a,b,c)=0$, то и $q(a,b,c)=0$. Естественно попробовать доказать, что многочлен q делится на многочлен p, то есть найти такой многочлен $r=r(a,b,c)$, что $q=pr$ (можно доказать общую теорему для многочленов от любого числа переменных: если q равен нулю при всех тех значениях переменных, при которых p равен нулю, и при этом многочлен p *неприводим*, то есть не раскладывается на множители — а в данном случае так оно и есть, — то q должен делиться на p). Делить многочлены можно обычным образом — «уголком», считая их многочленами от одной переменной a (в коэффициенты которых входят буквы b и c); например, p запишется так:

$$p(a,b,c)=-a^3+p_1(b,c)a^2+$$
$$+p_2(b,c)a+p_3(b,c).$$

В результате мы получили бы, разумеется, что $q=pr$, где

$$r(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)\left(\frac{1}{a-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=-a^2+ab+ac+$$
$$+bc-b^2-c^2.$$

В данном примере осуществление этого плана решения связано с очень трудоемкими вычислениями (в многочлене $q(a,b,c)$ даже после приведения подобных членов останется 21 член!), но мы очень советуем читателям обдумать все детали этого общего плана, применимого ко многим другим задачам.

Н. Б. Васильев

М28

а) Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Докажите, что за 8 проверок можно выделить оба радиоактивных шара.

б) Из 11 шаров 2 радиоактивны. Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать выделение обоих радиоактивных шаров.

Начнем с аналогичной, но более простой задачи. Пусть дано n шаров, среди которых один радиоактивен; за сколько проверок его можно выделить? Легко указать способ, позволяющий за k проверок выделить один из $n=2^k$ шаров: вначале делим все шары на две равные кучки по 2^{k-1} шаров в каждой, проверяем одну из них и тем самым определяем, в какой из них находится радиоактивный шар, затем эту кучку из 2^{k-1} шаров снова делим пополам, проверяем одну из половин и т. д. — при каждой проверке число шаров уменьшается вдвое, и после k проверок мы найдем радиоактивный шар. Ясно, что если $n<2^k$, то тоже достаточно k проверок. Итак, для того чтобы выделить один радиоактивный шар из n, достаточно проделать $f_1(n)$ проверок, где $f_1(n)$ — наименьшее целое число k, для которого $n\leqslant 2^k$ (другими словами, $f_1(n)$ — наименьшее целое число, большее или равное $\log_2 n$). Ниже мы увидим, что меньшего числа проверок заведомо недостаточно.

Теперь перейдем непосредственно к решению нашей задачи. Здесь уже не удается получить точный результат сразу для любого n, и мы выясним сначала, за сколько проверок можно выделить 2 радиоактивных шара из n, если n — небольшое число.

Для $n=3$ достаточно двух проверок; после того, как мы проверим один за другим два шара, будет уже ясно, радиоактивен ли оставшийся третий шар. Может, конечно случиться, что первый же проверенный шар не радиоактивен, и тогда дальнейшие проверки не нужны;

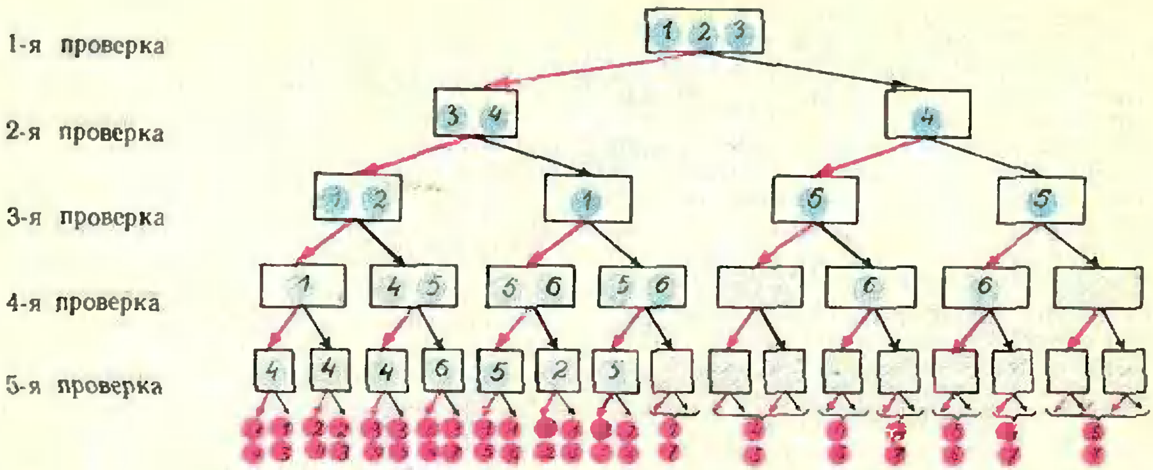


Рис. 1. На этом рисунке представлен способ, позволяющий за 5 проверок выделить 2 радиоактивных шара из 7. Мы считаем, что шары занумерованы числами 1, 2, ..., 7, и в каждой клетке записываем кучку шаров, которые подвергаются проверке (иногда кучка состоит из одного шара). Например, первой проверяется кучка из трех шаров {1, 2, 3}. У каждой проверки возможны два исхода: «есть радиоактивность» — тогда нужно идти по красной стрелке, и «нет радиоактивности» тогда по черной стрелке. Если клетка заштрихована, значит, дальнейшие проверки не нужны. Для каждого пути, спускающегося по стрелкам сверху вниз, в результате всех проделанных на этом пути проверок можно установить, какая именно пара шаров радиоактивна (она указана под самой нижней стрелкой). Убедитесь в этом!

но нас интересует, за какое число проверок можно выделить радиоактивные шары наверняка, при любом, даже самом невыгодном для нас варианте их расположения. Точно так же, проверяя шары один за другим, можно выделить два шара из 4 за 3 проверки, из 5 — за 4, из 6 — за 5, из 7 — за 6 и т. д. Впрочем, для $n=$ $=7$ можно обойтись и пятью проверками. Прежде чем читать решение дальше, попробуйте это доказать, то есть найти соответствующий способ поиска радиоактивных шаров. Один такой способ (их существует несколько) указан на рисунке 1.

Этот рисунок помогает понять, что мы понимаем под словами «способ поиска шаров»: чтобы задать какой-то способ, нужно указать кучку шаров, которая проверяется первой, а также указать, какую кучку проверять после каждого из возможных исходов очередного испытания на радиоактивность; другими словами, нужно начертить диаграмму из прямоугольных клеточек и стрелок — такую же, как на рисунке 1, только, если нужно, с другим числом k проверок — и вписать в каждую клетку какие-то номера шаров.

Теперь постараемся ответить на два тесно связанных между собой вопроса: как найти способ поиска двух шаров среди n, состоящий из k проверок, если такой способ существует; если его не существует, то как это доказать?

В принципе для любых конкретных n и k эти вопросы можно решить «полным перебором»: перепробовать один за другим все возможные способы заполнить клетки диаграммы, соответствующей k проверкам, подмножествами из n шаров (ведь таких способов существует конечное число!) и для каждого из этих способов проверить, позволяет ли он выделить радиоактивные шары или нет (то есть будут ли разным предположениям: какая именно пара шаров радиоактивна — соответствовать разные пути по стрелочкам сверху вниз). Но число таких способов даже при небольших n и k настолько велико, что практически проделать «полный перебор» невозможно даже с помощью вычислительной машины (например, при $n=11$ и $k=7$ заполнить клетки диаграммы кучками можно более чем 10^{400} разных способов!). *Мы покажем сейчас, как можно этот перебор сильно сократить.*

Вернемся снова к рисунку 1. От самого нижнего ряда клеточек, соответствующего последней, пятой проверке, отходит $2^5=32$ стрелки. В общем случае, для k проверок, их будет 2^k. Если способ поиска, записанный на диаграмме, гарантирует выделение радиоактивных шаров, то каждой из этих стрелочек соответствует только один из возможных вариантов ответа: какие именно два шара радиоактивны (но, может быть, разным стрелочкам соответствует один и тот же вариант). Поэтому число различных возможных вариантов ответа заведомо не больше числа стрелочек, то есть не больше 2^k.

Сформулируем это основное соображение так:

Если число возможных вариантов больше 2^k, то не существует способа, позволяющего за k проверок выделить один из этих вариантов.

То же самое можно сказать так:

Если существует способ, позволяющий за k проверок выбрать один вариант из N возможных, то $N \leqslant 2^k$.

(Последнее неравенство можно записать еще и так: $k \geqslant f_1(N)$.)

Конечно, это правило применимо к любой задаче, где нужно выбрать один вариант из N по результатам нескольких проверок; важно лишь то, что *каждая проверка имеет два возможных исхода* (в нашей задаче эти исходы таковы: «есть радиоактивность» и «нет радиоактивности»). В частности, из этого правила следует, что нельзя выделить о д и н радиоактивный шар из n менее чем за $f_1(n)$ проверок: если $f_1(n)=k$, то $2^{k-1}<n$, а различных вариантов в этой задаче существует n (радиоактивен 1-й шар, радиоактивен 2-й шар, ..., радиоактивен n-й шар).

Вернемся снова к задаче, где имеется два радиоактивных шара. Сколько здесь различных вариантов? На рисунке 1, где мы выбираем 2 шара из 7, число вариантов равно 21. В общем случае существует $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ вариантов выбрать 2 шара из n. Из нашего основного правила, напечатанного выше на розовом фоне, следует, что если можно за k проверок выделить 2 шара из n, то $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 2^k$.

Условимся обозначать наименьшее число проверок, необходимое для выделения 2 шаров из n, через $f_2(n)$. Тогда последнее неравенство можно записать так:

$$f_2(n) \geqslant f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

n	3	4	5	6	7	8
$\frac{n(n-1)}{2}$	3	6	10	15	21	28
$f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$	2	3	4	4	5	5
$f_2(n)$	2	3	4	5	5	6

Из таблицы видно, что при некоторых n (например, при $n=6$, $n=8$) здесь возможно и строгое неравенство. Действительно, для того чтобы за k проверок можно было найти 2 радиоактивных шара среди n, мало того, чтобы выполнялось неравенство $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 2^k$. Нужно еще, чтобы таких вариантов, для которых первая проверка дала результат «+» (есть радиоактивность), было не больше 2^{k-1} и таких, для которых она дала результат «—» (нет радиоактивности), тоже было бы не больше 2^{k-1}, — ведь иначе, согласно основному правилу, мы не сможем за $k-1$ проверку выбрать из этих вариантов один! Точно так же каждому из исходов «++» (1-я проверка «+», 2-я проверка «+»), «+—», «—+», «— —» должно соответствовать не более 2^{k-2} вариантов и т. д.

Мы вернемся к решению этой задачи в следующем номере журнала.

А. Н. Виленкин

Ф35.

Спутник летит на высоте $h=300$ *км*. Какие неподвижные предметы можно будет рассмотреть на фотографии, сделанной со спутника, если время экспозиции составляет $\tau=0{,}2$ *сек*?

На фотографии, полученной со спутника, при хорошем качестве пленки можно будет рассмотреть те неподвижные предметы, величина которых превышает смещение спутника относительно Земли за время экспозиции. Предметы меньших размеров на фотографии будут нерезкими — «размытыми».

Для того чтобы найти смещение спутника, нам нужно знать период T обращения спутника вокруг Земли. Нетрудно найти угловую скорость ω вращения спутника. Считая орбиту круговой, мы можем записать уравнение движения спутника (уравнение второго закона Ньютона):

$$m\omega^2 (R+h) = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

(m — масса спутника, M — масса Земли, R — радиус Земли и γ — гравитационная постоянная). Отсюда

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{M}{(R+h)^3}} \quad \text{и}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{\gamma M}}.$$

Так как $h \ll R$, то мы можем пренебречь h по сравнению с R и записать формулу для периода обращения спутника в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}.$$

Это выражение можно еще упростить. Так как тело массы m, лежащее на поверхности Земли, притягивается к ней с силой, равной mg,

то $mg = \gamma \frac{Mm}{R^2}$. Поэтому $\gamma \frac{M}{R^2} = g$ и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5000 \text{ сек}.$$

Пусть спутник находится над точкой A земной поверхности (рис. 2).

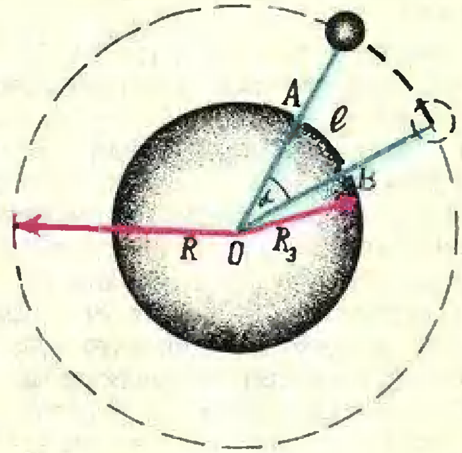


Рис. 2.

За время экспозиции τ он сделает $\frac{\tau}{T}$ часть оборота вокруг Земли и будет находиться над точкой B. Найдем расстояние l между точками A и B:

$$l = \frac{2\pi R}{2\pi}\alpha = R\cdot\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) =$$

$$= 2\pi R\frac{\tau}{T} \approx 1{,}6\cdot 10^3 \text{ м}.$$

Таким образом, на фотографии можно будет рассмотреть предметы, размеры которых больше 1,6 *км*.

Если считать, что объектив фотокамеры имеет фокусное расстояние 10 *см*, то, как нетрудно подсчитать, предметы длиной 1,6 *км* на фотопленке должны иметь размер 0,5 *мм*. Это означает, что определяющим при фотографировании будет не качество пленки, а размытость изображения из-за смещения спутника.

Ф36

Капля жидкости лежит на плоской стороне полусферической стеклянной пластинки. Покажите, как можно определить показатель преломления жидкости из наблюдений полного внутреннего отражения. Показатель преломления стекла тоже неизвестен, и его надо определить.

Если луч света идет так, как показано на рисунке 3, то мы можем записать, что

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n_{ж},$$

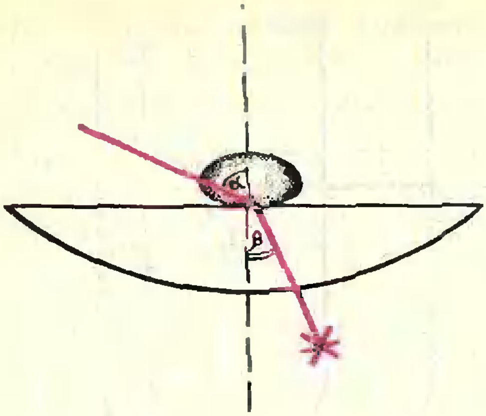


Рис. 3.

где $n_{жс}$ — показатель преломления луча света при переходе из жидкости в стекло.

При полном внутреннем отражении света на границе стекло — жидкость $\alpha=90°$, и поэтому $\sin\beta_0=n_{жс}$, где β_0 — угол падения луча, при котором наблюдается полное внутреннее отражение. Аналогично для полного внутреннего отражения света на границе стекло — воздух мы можем записать $\sin\delta_0=\frac{1}{n_c}$, где n_c — показатель преломления стекла. Из этих двух формул, учитывая, что $n_{жс}=\frac{n_ж}{n_c}$, найдем

$$n_ж=\frac{\sin\beta_0}{\sin\delta_0}.$$

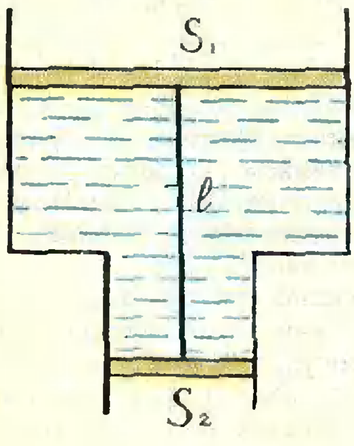


Рис. 4.

Теперь несложно определить показатель преломления жидкости: направить луч света так, чтобы его можно было наблюдать лишь испытавшим полное внутреннее отражение на границе раздела стекло — жидкость. Этим мы определим угол β_0. Затем точно так же определим угол δ_0. После этого вычислить показатель преломления жидкости не составит труда. Провести опыты поможет то обстоятельство, что луч не испытывает преломления на сферической границе стекла и воздуха, так как он падает перпендикулярно поверхности стекла. Это позволяет легко определить направление луча, падающего на плоскую границу пластинки.

Ф37

В двух вертикально расположенных цилиндрах, площади сечения которых S_1 и S_2 находятся два невесомых поршня, соединенных тонкой невесомой нитью длины l (рис. 4). Пространство между поршнями заполнено водой. Найти натяжение нити, если концы сосудов открыты в атмосферу. Плотность воды ρ.

Если давление жидкости на большой поршень (с площадью S_1) равно p, а атмосферное давление p_0, то на поршень действует вверх сила давления $F_1=S_1p$, а вниз — сила T натяжения нити и сила атмосферного давления $F_1'=p_0\cdot S_1$. Так как поршень находится в равновесии, то

$$S_1p=S_1p_0+T.$$

Аналогичное уравнение можно составить и для нижнего поршня: вверх на него действуют сила натяжения нити T и сила атмосферного давления $F_2'=p_0S_2$, а вниз — сила давления воды $F_1=p'S_2$. Причем давление p' воды на нижний поршень на величину ρgl больше, чем на верхний. Так как поршень находится в равновесии, то

$$T+p_0S_2=(p+\rho gl)S_2.$$

Решая оба уравнения совместно, найдем

$$T=\rho gl\frac{S_1S_2}{S_1-S_2}.$$

Обычно мы проверяем ответ, исследуя его при предельных значениях параметров. Будем считать, что $S_2 \to S_1$. В этом случае $T \to \infty$. Это и понятно. Вся система сохраняет равновесие благодаря давлению воды на кольцо с площадью $S_1 - S_2$ на верхнем поршне. Если $S_1 \to S_2$, то давление на это кольцо должно стремиться к бесконечности. При этом к бесконечности должна стремиться и сила натяжения нити.

При $S_1 = S_2$ мы получим, что T бесконечно. Однако это уже неверно. Подобный предельный переход невозможен. Решая задачу, мы исходили из того, что система находится в равновесии. Однако при $S_1 = S_2$ равновесие невозможно и система поршней будет падать равноускоренно с ускорением свободного падения g. Натяжение нити в этом случае должно быть равно нулю. Этот пример показывает, как осторожно нужно относиться к предельным переходам в физике. Нужно следить за тем, чтобы при этом явление не стало совсем иным.

Такое решение прислали *Н. Федин* из Омска, десятиклассник *М. Федоров* из Москвы, *А. Рагозин* из Ижевска.

Интересное решение предложил *А. Жуков* из Кировска Донецкой области. Он воспользовался методом виртуальных перемещений. Хотя подробный рассказ об этом методе требует особой большой статьи, решение будет понятно и так.

Пусть нить уменьшилась на Δl, причем верхний поршень переместился на Δl_1, а нижний — на Δl_2. Так как при этом объем воды между поршнями не изменился, то оба поршня должны сместиться в одну и ту же сторону (опуститься), причем так, что

$$\Delta l_1 S_1 = \Delta l_2 S_2 \text{ и } \Delta l_2 - \Delta l_1 = \Delta l \quad (\Delta l_2 > \Delta l_1).$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$\Delta l_1 = \Delta l \frac{S_2}{S_1 - S_2} \text{ и } \Delta l_2 = \Delta l \frac{S_1}{S_1 - S_2}.$$

Изменение потенциальной энергии системы при перемещении объема воды $\rho S_1 \Delta l_1$ (или $\rho S_2 \Delta l_2$) на l должно быть равно работе силы натяжения нити. Поэтому мы можем записать, что

$$T\Delta l = \rho g l(\Delta l_1 S_1) = \rho g l(\Delta l_2 S_2).$$

Отсюда

$$T = \rho g l \frac{S_2 S_1}{S_1 - S_2}.$$

Ф38

Широкое колено U-образного ртутного манометра имеет втрое больший диаметр, чем узкое. К какому колену следует прикрепить шкалу для отсчета изменения давления, чтобы точность измерения была выше?

Пусть при изменении давления уровень ртути в широком колене поднялся на Δh_1, а в узком — опустился на Δh_2. Из условия неразрывности столба $\Delta h_1 S_1 = \Delta h_2 S_2$. Отсюда

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 \frac{S_1}{S_2} = 9\Delta h_1.$$

Это означает, что если шкалу прикрепить к тонкому колену манометра, то цена деления будет в 9 раз меньше. В 9 раз точнее будет при этом и отсчет изменения давления.

Интересно посмотреть, к какому из колен манометра выгоднее подсоединять сосуд, в котором мы измеряем изменение давления. Из условия равновесия жидкости в U-образном сосуде мы можем записать

$$p + \Delta p = p + \rho g h,$$

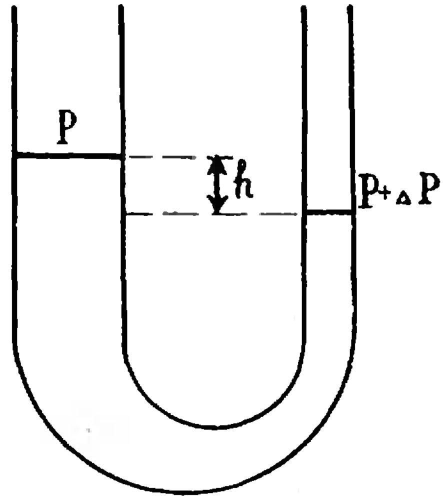


Рис. 5.

где h — разность уровней жидкости в коленах (рис. 5). Из этого уравнения найдем, что $h = \frac{\Delta p}{\rho g}$. Мы видим, что h не зависит от площадей колен манометра. Это означает, что точность измерений при подсоединении сосуда как к широкому, так и к узкому колену одна и та же.

Правильное решение прислали *А. Жуков* и восьмиклассница *С. Пастухова* из Свердловска.

Ф39

Планету радиуса r и массы M окружает равноплотная атмосфера, состоящая из газа с молекулярным весом μ. Какова температура атмосферы на поверхности планеты, если высота атмосферы равна h?

Запишем уравнение газового состояния для объема газа V с массой m (уравнение Менделеева — Клапейрона):

$$PV = \frac{m}{\mu} RT;$$

P — давление, V — объем газа, R — газовая постоянная и T — температура. Так как $\frac{m}{V} = \rho$, где ρ — плотность газа, то это уравнение мы можем переписать в виде $P = \frac{\rho}{\mu} RT$.

Отсюда $T = \frac{P\mu}{\rho R}$.

Ясно, что для того, чтобы найти температуру на поверхности планеты, нам нужно найти давление на ее поверхности. Если $\rho = \mathrm{const}$, то $P = \rho g h$, где g — ускорение свободного падения на данной планете. Найдем его.

Для тела массы m, находящегося на поверхности планеты, сила притяжения равна mg. С другой стороны, согласно закону всемирного тяготения она равна $\gamma \frac{mM}{r^2}$. Поэтому можно записать, что $mg = \gamma \frac{mM}{r^2}$.

Отсюда $g = \gamma \frac{M}{r^2}$ и $P = \rho\gamma \frac{M}{r^2} h$.

Подставив это выражение для P в уравнение для температуры, получим

$$T = \frac{\gamma M \mu h}{r^2 R}.$$

Правильное решение задачи прислал *В. Мальков* из Орши и *А. Проскуряков* из Москвы.

Ф40

При какой разности потенциалов между электродами зажигается неоновая лампочка, если энергия ионизации неона $I = 21{,}5$ *эв*, а среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами газа равно $l = 0{,}4$ *мм*? Электроды имеют вид больших плоских пластин, расположенных на расстоянии $d = 3$ *мм* друг от друга.

Если разность потенциалов между электродами U, то напряженность электрического поля между ними $E = \frac{U}{d}$. В этом поле на электрон действует сила $F = E \cdot e$ (e — заряд электрона), сообщающая ему ускорение

$a = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m} = \frac{Ue}{dm}$, где m — масса электрона.

При столкновении с атомом газа электрон передает ему свою энергию и останавливается (мы считаем, что столкновение неупруго). Масса атома много больше массы электрона. Поэтому атому газа при столкновении передается энергия $\frac{mv^2}{2}$, приобретаемая электроном между его последовательными столкновениями. Эта энергия должна быть равна энергии ионизации газа I:

$$\frac{mv^2}{2} = I. \qquad (*)$$

Найдем теперь скорость, приобретаемую электроном. Если время разгона равно τ, то мы можем записать, что $v = a\tau = \frac{Ue}{md}\tau$ и $l = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{Ue\tau^2}{2md}$.

Из этих уравнений найдем, что

$$v = \sqrt{\frac{2Uel}{md}}.$$

Подставляя это выражение для v в уравнение (*), получим

$$\frac{Uel}{d} = I.$$

Отсюда $U = \frac{Id}{el} \approx 160$ *в*.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В. В. Гольдберг

Показательными уравнениями обычно называют уравнения, в которых неизвестная величина содержится в показателе степени (а основания степеней ее не содержат).

Решение показательных уравнений основано на следующем свойстве степеней:

если две степени с одним и тем же положительным и отличным от единицы основанием равны, то равны и их показатели.

Согласно этому свойству простейшее показательное уравнение

$$a^x = b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

решается следующим образом:

$$a^x = a^{\log_a b},\quad x = \log_a b.$$

Трудность при решении показательных уравнений часто состоит в том, что нужно уметь увидеть общее основание левой и правой частей уравнения. Если в уравнении

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

общее основание $\frac{2}{3}$ (или $\frac{3}{2}$) левой и правой частей сразу бросается в глаза, то в уравнении

$$(0{,}4)^{x-1} = (6{,}25)^{6x-5} \qquad (2)$$

для отыскания общего основания $\frac{2}{5}$ $\left(\text{или } \frac{5}{2}\right)$ необходимо предварительно обратить десятичные дроби в обыкновенные. (Доведите до конца решения приведенных примеров; в уравнении (1) вы получите ответ $x=2$, а в уравнении (2) $x = \frac{11}{13}$.)

Для сведения многих показательных уравнений к простейшему часто бывает полезна следующая хорошо известная формула:

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p. \qquad (3)$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225.$$

Пользуясь формулой (3), получим

$$15^{\frac{x}{2}} = 15^2,$$

откуда находим $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение

$$2^{3x} \cdot 5^x = 1600.$$

Решение. Имеем следующую цепочку эквивалентных уравнений:

$$(2^3)^x \cdot 5^x = 1600,\ 8^x \cdot 5^x = 1600,$$
$$40^x = 40^2,\quad x = 2.$$

Легко свести к простейшему уравнение вида

$$a^{\varphi(x)} = 1 \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Для этого достаточно единицу представить как a в нулевой степени: $1 = a^0$.

Пример 3. Решить уравнение

$$5^{x^2+x-2} = 1.$$

Решение. Последовательно находим

$$5^{x^2+x-2} = 5^0,\ x^2 + x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$9^{3-5x}\cdot 7^{5x-3}=1.$$

Решение. По определению степени с отрицательным показателем $9^{3-5x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{5x-3}$. Далее последовательно находим

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{5x-3}=\left(\frac{7}{9}\right)^{0},\quad 5x-3=0,$$

$$x=\frac{3}{5}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$3^{2x-1}\cdot 5^{3x+2}=\frac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}.$$

Решение. В этом уравнении имеются два основания: 3 и 5. Подсчитаем, с каким показателем эти основания входят в уравнение. С этой целью «перенесем» (с помощью деления) все члены в левую часть:

$$\frac{3^{2x-1}}{9\cdot 3^{3x}}\cdot\frac{5^{3x+2}\cdot 5}{5^{2x}}=1.$$

Далее имеем

$$5^{x+3}\cdot 3^{-x-3}=1,\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{x+3}=\left(\frac{5}{3}\right)^{0},$$

$$x+3=0,\ x=-3.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$$

Решение. Сгруппируем члены, содержащие 4^x и 9^x:

$$9^{x}\left(\frac{1}{3}\cdot 81+\frac{9}{2}\right)=4^{x}(24-3),$$

$$\frac{63}{2}\cdot 9^{x}=21\cdot 4^{x}.$$

Сокращая на 21, получим $\frac{3}{2}\cdot 9^{x}=4^{x}$, или $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{0}$, откуда находим

$$2x+1=0,\ x=-\frac{1}{2}.$$

К простейшим показательным уравнениям иногда удается свести показательные уравнения более сложного вида:

$$f(a^{x})=0.$$

Замена $a^{x}=y$ сводит это уравнение к уравнению $f(y)=0$. Если $y_1,\dots$ $\dots, y_k$—корни последнего уравнения, то нам остается решить совокупность простейших показательных уравнений

$$a^{x}=y_1,\ \dots,\ a^{x}=y_k.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$2^{x+1}+3\cdot 2^{x-3}=76.$$

Решение. Обозначим 2^x через y, тогда уравнение примет вид $2y+\frac{3}{8}y=76$, откуда находим $y=32$. Таким образом, $2^{x}=32$, $2^{x}=2^{5}$, $x=5$.

Пример 8. Решить уравнение

$$3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$3\cdot 9^{\frac{2}{x}}-10\cdot 9^{\frac{1}{x}}+3=0.$$

Обозначив $9^{\frac{1}{x}}$ через y, получим квадратное уравнение относительно y: $3y^2-$ $-10y+3=0$, откуда $y_1=3,\ y_2=\frac{1}{3}$.

Далее рассматриваем два случая:

а) $9^{\frac{1}{x}}=3,\quad 3^{\frac{2}{x}}=3^{1},\ \frac{2}{x}=1,\ x_1=2;$

б) $9^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{3},\quad 3^{\frac{2}{x}}=3^{-1},\quad \frac{2}{x}=-1,$

$$x_2=-2.$$

К решению квадратного уравнения сводятся решения таких показательных уравнений, в которых имеются три различных основания, образующие геометрическую прогрессию, причем эти основания возводятся в одну и ту же зависящую от x степень *).

*) В общем виде такие уравнения можно записать следующим образом: $a(m^{2})^{\varphi(x)}+$ $+b(mn)^{\varphi(x)}+c(n^{2})^{\varphi(x)}=0$, где $mn>0$, $m\neq 1$, $n\neq 1$, a, b, c — любые действительные числа, причем $a\neq 0$. Заменой $\left(\frac{m}{n}\right)^{\varphi(x)}=y$ это уравнение сводится к квадратному $ay^{2}+by+c=0$.

Пример 9. Решить уравнение

$$3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x.$$

Решение. Мы видим, что в этом уравнении основания 16, 36, 81 образуют геометрическую прогрессию и возводятся в одну и ту же степень x. Для решения разделим обе части уравнения на 81^x. Получаем

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{9}\right)^x=2.$$

Обозначив $\left(\frac{4}{9}\right)^x$ через y, приходим к квадратному уравнению $3y^2+y-2=0$ с корнями $y_1=-1$, $y_2=\frac{2}{3}$. Рассматриваем два случая:

а) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=-1$ (решений нет);

б) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^1$,

$$2x=1,\ x=\frac{1}{2}.$$

Пример 10. Решить уравнение

$$27^x+12^x=2\cdot 8^x.$$

Это уравнение близко к только что рассмотренному: показатель степени у оснований один и тот же, однако основания 27, 12 и 8 геометрической прогрессии не образуют. Геометрическую прогрессию образуют числа 27, 18, 12 и 8 — мы можем считать, что член, содержащий 18^x, входит в уравнение с нулевым коэффициентом.

Решение. Делим все члены на 8^x, получаем

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2.$$

Обозначив $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ через y, приходим к кубическому уравнению

$$y^3+y-2=0,$$

левую часть которого легко разложить на множители:

$$(y^3-1)+(y-1)=0,$$
$$(y-1)(y^2+y+2)=0.$$

Единственный действительный корень этого уравнения $y=1$ приводит к уравнению $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$, откуда находим $x=0$.

Пример 11. Решить уравнение

$$5\cdot 2^{3x-3}-3\cdot 2^{5-3x}+7=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{5}{8}\cdot 2^{3x}-\frac{96}{2^{3x}}+7=0.$$

Обозначим 2^{3x} через y, тогда получим:

$$\frac{5}{8}y-\frac{96}{y}+7=0.$$
$$5y^2+56y-768=0,$$
$$y_1=-19{,}2;\quad y_2=8.$$

а) $2^{3x}=-19{,}2$ — уравнение не имеет решений.

б) $2^{3x}=8$, $2^{3x}=2^3$, $3x=3$, $x=1$.

В разобранном примере произведение оснований равно единице, и это сразу бросается в глаза; в следующем примере этот факт заметить не так просто *).

Пример 12. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+$$
$$+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10.$$

Решение. Перемножим основания:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=$$
$$=\sqrt{25-24}=1.$$

Если обозначить $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ через y, то $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x}=\frac{1}{y}$. Следова-

*) Заметим, что уравнения, разобранные в примерах 11 и 12, можно отнести к тому же типу, что и уравнения примеров 9 и 10: основания степеней в них 2, 1, $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, 1, $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ образуют геометрическую прогрессию и возводятся в одну и ту же зависящую от x степень.

тельно, уравнение принимает вид $y+\frac{1}{y}=10$ или $y^2-10y+1=0$, откуда находим $y_1=5+2\sqrt{6}$, $y_2=5-2\sqrt{6}$. Рассматриваем два случая:

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}$,

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2,$$

$$x_1=2.$$

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}$,

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=$$

$$=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{-2}, \quad x_2=-2.$$

Не всегда показательное уравнение можно отнести к одному из рассмотренных типов. В следующих примерах даны уравнения, при решении которых появятся моменты, не встречавшиеся у нас ранее.

Пример 13. Решить уравнение

$$5^x\cdot\sqrt[x+1]{8^x}=100.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$5^x\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}}=5^2\cdot 2^2. \qquad (4)$$

Разделим обе части уравнения (4) на $5^2\cdot2^2$, получим

$$5^{x-2}\cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}}=1, \text{ или}$$

$$\left(5\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2}=1. \qquad (5)$$

Нетрудно видеть, что это равенство возможно в любом из двух случаев:

а) показатель степени равен нулю, что дает $x_1=2$;

б) выражение, возводимое в степень $x-2$, равно единице, что приводит ко второму решению:

$$5\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}=1,\ 5^{x+1}\cdot 2=1,$$

$$(x+1)\lg 5+\lg 2=0,$$

$$x+1=-\frac{\lg 2}{\lg 5},\quad x_2=-1-\frac{\lg 2}{\lg 5},$$

$$x_2=-\frac{1}{\lg 5}.$$

При решении этого уравнения второй корень часто теряют, либо забывая в уравнении (5) приравнять основание единице, либо сразу приравнивая показатели у 5 и 2 в уравнении (4).

Пример 14. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$$

Решение. Заметим, что

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2^2.$$

Поэтому данное уравнение имеет решение $x=2$. Трудность состоит в доказательстве единственности полученного решения. Здесь можно рассуждать, например, так. Запишем наше уравнение в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1. \qquad (6)$$

Каждая из функций $y=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x$ и $y=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x$, как показательная функция с основанием, меньшим единицы, является убывающей для $-\infty<x<+\infty$, поэтому их сумма — тоже убывающая функция. Значит, при $x<2$ левая часть уравнения (6) больше единицы, а при $x>2$ меньше единицы.

Ответ: $x=2$.

Упражнения

Решить следующие уравнения:

1. $2\cdot(0{,}5)^{-\sqrt{x}}=(0{,}25)^{1-\sqrt{x}}$.
2. $12^{2x+4}=3^{3x}\cdot4^{x+6}$.
3. $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=8\cdot3^{\frac{x}{3}}$.

4. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

5. $3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x = 2^{x+3} + 3^{x-2}$.

6. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

7. $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

8. $9^{x-1} + 3^x = 2\cdot 3^{1,5x}$.

9. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

10. $8^x + 18^x = 2\cdot 27^x$.

11. $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$.

12. $$\sqrt[x]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \sqrt[x]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} - \sqrt[x]{\frac{2}{3}} + \sqrt[x]{\frac{3}{2}} = 3.$$

13. $6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} = 0$.

14. $4^x = 2\cdot 14^x + 3\cdot 49^x$.

15. $$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x + \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x = 2a \quad (a > 1).$$

Проверьте, что уравнение примера 12 получается из этого уравнения при $a=5$. Напишите, какой вид принимает это уравнение при $a = \sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, 3, 4, 6.

16. $2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1$.

17. $(\sin 1)^x + (\cos 1)^x = 1$.

18. $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$.

19. $5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}}$.

20. $10^{x^2} = 2\cdot 100^x$.

21. $2^{x+3} - 3^{x^2-2} = 3^{x^2+1} - 2^{x-1}$.

22. $3^{x^2} + 4^{x^2} = 5^{x^2}$.

23. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

24. $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$.

25. $8^x + 9\cdot 2^{x+2} = 208$.

(Начало см. на стр. 31.)

Следующий важный шаг в усовершенствовании электромагнитов был сделан американским физиком Джозефом Генри в 1827 году. Он первый догадался намотать на железный сердечник не один, а много слоев проволоки, а сами витки укладывать вплотную друг к другу. Возможно, что до этого додумались бы и другие, но в то время еще не было проволоки, покрытой изоляцией. Генри и был первым, кто сделал такую проволоку. В продаже проводов с изоляцией тогда, да и много позже, конечно, не было. По свидетельству сотрудника Генри, изобретателя телеграфа Ф. Морзе, даже в 1837 году не голыми проволоками пользовались только ... модистки для изготовления каркасов дамских шляп. Провода, покрытые изоляцией, Генри изготовил сам. В качестве изоляционного материала он использовал полосы из шелка, нарезанного из ... нарядов его жены (в те времена женщины носили длинные и пышные одежды). Так впервые появились и были использованы изолированные провода. Судя по сохранившимся в музее электромагнитам Генри, ему пришлось намотать шелковые полосы на многие километры проволоки. Но зато уже в 1831 году он мог сообщить, что самый большой его электромагнит способен удерживать груз в 930 килограммов!

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ НА МЕХМАТЕ МГУ В 1970 ГОДУ

Н. Н. Колесников

В «Кванте» № 2 за 1970 год была напечатана статья Н. С. Бахвалова и Н. Н. Кузнецова о письменном экзамене по математике на мехмате МГУ в 1969 году. Хотелось бы, не повторяя сделанные там замечания о характере этого экзамена, подчеркнуть некоторые его особенности в 1970 году.

Задачи, предложенные поступавшим, еще раз подтверждают положение о том, что успешное их решение доступно любому абитуриенту, твердо усвоившему школьную программу, а не только выпускникам математических школ. Вы увидите, что эти задачи не содержат «подводных камней» или «ловушек», а требуют четкого понимания основных разделов программы по математике для поступающих в вузы и определенных навыков в технике математических выкладок и решении простейших уравнений, неравенств и геометрических задач.

Естественно, что такая «стандартность» задач предполагает повышение требований к оценке их решений, требований к умению доводить решение до конца, а не ограничиваться намеками на решение. Удовлетворительная оценка (три) ставилась в 1970 году за доведенное до конца правильное решение любых двух или трех задач, хорошая (четыре) — любых четырех задач, отличная (пять) — пяти задач. На решение задания (набора из пяти задач — варианта) отводилось 4 астрономических часа.

Перейдем к разбору одного из вариантов письменного экзамена по математике, коротко останавливаясь на наиболее характерных ошибках, встретившихся в работах поступавших на механико-математический факультет.

Вариант I

1. Решить неравенство

$$-\log_{\frac{1}{2}}(1+\cos 3x)\leqslant 2+\log_2\left(\frac{1}{4}-\cos x\right).$$

2. Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} y^2-|xy|+2=0,\\ 8-x^2=(x+2y)^2. \end{cases}$$

3. Три гонщика A, B и C, стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A на расстоянии $^1/_3$ длины шоссе, а гонщик C — перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал B в тот момент, когда B закончил свой первый круг, а еще через 10 минут A впервые догнал гонщика C. Гонщик B тратит на круг на 2,5 минуты меньше, чем C. Сколько времени тратит на круг гонщик A?

4. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC. На диагонали BD находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

5. Шар радиуса r касается плоскости P в точке A. Прямая l образует с плоскостью P

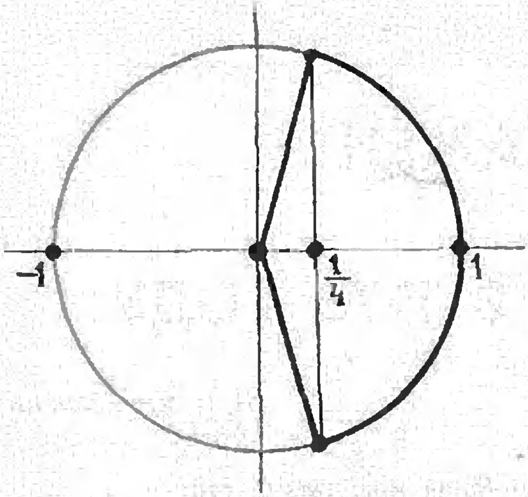


Рис. 1.

угол φ, пересекая эту плоскость в точке C и касается шара в точке B. Найти длину отрезка AB, если $AC=2r$.

1. Решение таких примеров принято начинать с нахождения общей области определения входящих в него функций, или ОДЗ. Очевидно, ОДЗ данного неравенства определяется системой

$$\begin{cases} 1+\cos 3x > 0, \\ \frac{1}{4}-\cos x > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 3x > -1, \\ \cos x < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Первое неравенство системы можно переписать так: $\cos 3x \neq -1$, откуда $x \neq \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$. Учитывая, что $\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$, то есть значения $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ исключаются вторым неравенством, получаем следующую систему неравенств (эквивалентную исходной):

$$\begin{cases} x \neq \pi(2k+1), \\ \cos x < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Значения неизвестного, удовлетворяющие последней системе, на тригонометрическом круге (рис. 1) отмечены красным цветом, а аналитически ОДЗ записывается следующим образом:

$$\arccos\frac{1}{4}+2\pi k < x < 2\pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k,$$
$$x \neq \pi(2k+1).$$

Перейдем в логарифмах к одному основанию, например к 2. Тогда неравенство примет вид

$$\log_2(1+\cos 3x) \leqslant 2 + \log_2\left(\frac{1}{4}-\cos x\right)$$

или

$$\log_2(1+\cos 3x) \leqslant \log_2(1-4\cos x). \quad (1)$$

Неравенство (1) в отмеченной ОДЗ эквивалентно такому:

$$1+\cos 3x \leqslant 1-4\cos x.$$

Перенося все члены влево и заменяя $\cos 3x$ на $4\cos^3 x - 3\cos x$, получим неравенство

$$(1+4\cos^2 x)\cos x \leqslant 0.$$

Выражение в скобках, очевидно, положительно, следовательно, неравенство (1) равносильно в ОДЗ такому:

$$\cos x \leqslant 0.$$

Решения последнего неравенства хорошо известны, с учетом ОДЗ *) получаем окончательно ответ:

$$2\pi k+\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}+2\pi k,$$

причем $x \neq \pi(2k+1)$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Самым характерным недочетом при решении этого простого примера явилось игнорирование ОДЗ или неумение с нею обращаться, что приводило к ошибке в ответе (точка π не была исключена). К неправильному ответу приходили и те поступавшие, которые не овладели техникой решения простых тригонометрических уравнений. Так, зачастую, считалось, что условие $\cos 3x > -1$ выполнено для любых x.

2. Решение этой системы можно провести несколькими способами. Приведем один из них.

Поскольку в первое уравнение

*) Ограничение $\cos x < {}^1/_4$ перекрывается неравенством $\cos x \leqslant 0$; поэтому остается лишь учесть, что $x \neq \pi(2k+1)$.

входит модуль произведения неизвестных, рассмотрим два случая.

а) Пусть $xy \geqslant 0$. При этом условии система имеет вид

$$\begin{cases} y^2 - xy + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x+2y)^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y^2 - xy + 2 = 0, \\ -8 + 2x^2 + 4xy + 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 4 и складывая со вторым, получим $2x^2+8y^2=0$, что возможно только при действительных $x=y=0$. Но эти значения неизвестных рассматриваемой системе явно не удовлетворяют.

б) Пусть теперь $xy<0$. Исходная система примет вид

$$\begin{cases} y^2 + xy + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x+2y)^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y^2 + xy + 2 = 0, \\ 2x^2 + 4xy + 4y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение опять на 4 и вычитая его из второго, получим $x^2=8$, то есть $x = \pm 2\sqrt{2}$. Теперь из первого уравнения легко найти y: $(y \pm \sqrt{2})^2 = 0$, откуда $y = \mp\sqrt{2}$.

Согласно предположению $xy<0$. Учитывая это, находим ответ:

$$x = 2\sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$$

или

$$x = -2\sqrt{2},\ y = \sqrt{2}.$$

Проверка подтверждает, что обе пары чисел являются корнями.

Этот пример также не содержит в себе никаких подвохов и хитростей. Он рассчитан на школьников, имеющих обычную математическую культуру. Ошибки поступавших при решении этого примера были связаны с нечетким представлением об абсолютной величине (модуле) функции и неумением правильно записать ответ. При этом либо не рассматривались два случая, а уравнение с модулем просто заменялось тем или другим уравнением без него, либо полученный набор значений x и y не был согласован с условием $xy<0$, появлялись лишние ответы.

3. Эту задачу можно решать по-разному, вводя те или другие неизвестные.

Пусть t_A, t_B и t_C — времена, которые тратят на круг гонщики A, B и C соответственно (длину пути примем за единицу). Тогда скорости каждого из них будут $\frac{1}{t_A}$, $\frac{1}{t_B}$, $\frac{1}{t_C}$.

Заметим, что при любых, но одинаковых абсолютных скоростях расстояние между гонщиками во все время движения сохранялось бы неизменным. Расстояния между гонщиками сокращаются за счет избытка скорости одного над скоростью другого. Скорость гонщика A относительно B есть $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_B}$, A относительно C — $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_C}$, а скорость B относительно C равна $\frac{1}{t_B} - \frac{1}{t_C}$.

Теперь легко перевести условия задачи на язык уравнений. Поскольку гонщик A впервые догнал B, когда последний закончил свой первый круг, то A догнал B за t_B часов. Но для этого A понадобилось покрыть $1/3$ круга с относительной скоростью $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_B}$, это дает уравнение

$$\left(\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_B}\right) t_B = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Начальное расстояние между гонщиками A и C было $2/3$, гонщик A покрыл его с относительной скоростью $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_C}$ за $t_B + \frac{1}{6}$ часов; получили второе уравнение:

$$\left(\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_C}\right)\left(t_B + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Кроме того, известно, что

$$t_B + \frac{1}{24} = t_C. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) сразу следует, что $t_B = \frac{4}{3} t_A$, а из уравнения (3) $t_C = \frac{4}{3} t_A + \frac{1}{24}$. Исключая теперь из

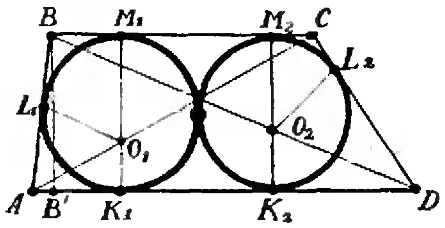


Рис. 2.

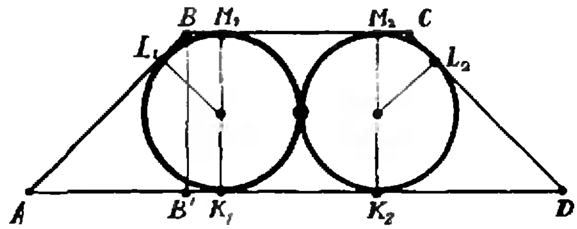


Рис. 3.

уравнения (2) t_B и t_C, получаем уравнение, содержащее только t_A:

$$\left(\frac{1}{t_A} - \frac{24}{32t_A + 1}\right)\left(\frac{4}{3}t_A + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3},$$

или

$$64t_A^2 - 12t_A - 1 = 0. \qquad (4)$$

Отбрасывая непригодное по смыслу задачи отрицательное решение квадратного уравнения (4), получаем ответ: $t_A = \frac{1}{4}$.

Большинство поступавших, не решивших до конца эту задачу, не проявили достаточных навыков в решении логических задач: они либо ошибались при составлении уравнений, либо не могли аккуратно решить полученную систему.

4. Пусть $ABCD$ (рис. 2) — данный четырехугольник, O_1 и O_2 — центры указанных окружностей, лежащие на диагоналях AC и DB. Точки K_1, L_1, M_1 являются точками касания окружности с центром в O_1 со сторонами AD, AB, BC соответственно, а K_2, L_2, M_2 — точки касания окружности с центром в O_2 со сторонами AD, CD, BC. Пусть B' — основание высоты, опущенной из B на AD.

Согласно условиям окружности равны и касаются друг друга, откуда следует параллельность общих к ним касательных: BC и AD. Теперь замечаем, что $\angle BCA = \angle CAD$, как накрест лежащие углы, и $\angle CAD = \angle BAC$, так как AC — биссектриса (AB и AD — касательные, а AC проходит через центр окружности). Следовательно, $\angle BAC = \angle CAD$, треугольник ABC — равнобедренный и $AB = BC$.

Итак, у нашего четырехугольника $BC \parallel AD$, $AB = CD$, следовательно, он либо трапеция, причем равнобедренная, либо параллелограмм.

Параллелограмм не подходит, поскольку центры O_1 и O_2 должны лежать на средней линии четырехугольника, но в параллелограмме диагонали, пересекаясь между собой, делятся пополам, то есть центры окружностей обязаны были бы совпасть, что противоречит условиям. Сделаем новый рисунок (рис. 3).

Пусть $BM_1 = M_2C = x$. Тогда $AB = BC = 2r + 2x$. Но $BM_1 = BL_1$, как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, и тогда

$$AL_1 = AK_1 = 2r + x.$$

По построению $B'K_1 = x$, следовательно, $AB' = 2r = BB'$, треугольник $AB'B$ равнобедренный и прямоугольный, то есть

$$\angle A = \angle ABB' = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \angle D = \frac{\pi}{4}.$$

Теперь легко получить ответ. Искомая площадь

$$S = BB'\frac{BC + AD}{2}, \quad BB' = 2r,$$

$$BC = AB = 2\sqrt{2}\,r,$$

$$AD = BC + 2AB' = 2\sqrt{2}\,r + 4r,$$

$$S = 2r \cdot \frac{2\sqrt{2}r + (2\sqrt{2}r + 4r)}{2} =$$

$$= 4(\sqrt{2} + 1)\,r^2.$$

Характерной ошибкой поступавших при решении этой задачи бы-

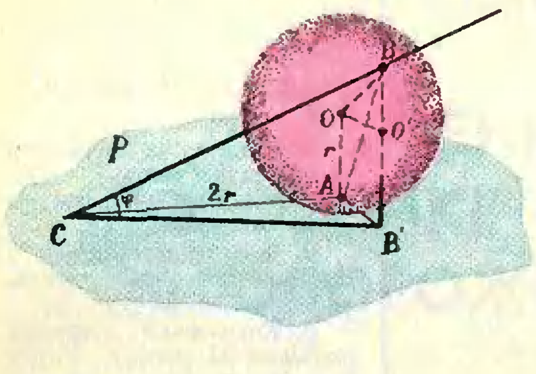


Рис. 4.

ло чрезмерное увлечение «очевидностью» некоторых логических выводов, небрежность в промежуточных рассуждениях. Так, многие без всяких доказательств написали, что $ABCD$ — равнобочная трапеция, другие возможности при этом не исследовались. Были случаи, когда доказательством того, что $ABCD$ может быть только трапецией, служил ... чертеж и слова о том, что для выполнения условий задачи по-другому четырехугольник нарисовать нельзя.

5. Пусть B' — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость P (рис. 4). Согласно условию

$$\angle BCB' = \varphi,\ OB = OA = r,\ CA = 2r,$$

$$\angle CBO = \frac{\pi}{2}.$$

Искомую длину отрезка AB можно найти, например, из прямоугольного треугольника $AB'B$, стороны которого легко вычислить. Замечаем, что $CB = CA = 2r$ — это отрезки касательных к шару, проведенных из одной точки. Отсюда следует, что

$$BB' = CB\sin\varphi = 2r\sin\varphi.$$

Сторона AB' треугольника $AB'B$ равна перпендикуляру OO', опущенному из O на BB' ($OA \parallel BB'$, как перпендикуляры к одной плоскости; $BB' \perp AB'$, так как AB' лежит в плоскости P, перпендикулярной BB'; $OO' \perp BB'$ по построению; поэтому $OO'B'A$ — прямоугольник). OO' находится из прямоугольного треугольника $OO'B$:

$$OO' = \sqrt{r^2 - (BO')^2},$$

$$BO' = |BB' - B'O'| = |BB' - OA| = |2r\sin\varphi - r|,$$

$$OO' = AB' = \sqrt{\sin\varphi - \sin^2\varphi}\ 2r.$$

Наконец, AB находится из треугольника $AB'B$:

$$AB = \sqrt{(AB')^2 + (B'B)^2} = 2r\sqrt{\sin\varphi}.$$

Мы сейчас убедились, что трудности при решении этой стереометрической задачи (как и других, предложенных в 1970 году) не превосходят тех, которые встречаются при решении школьных задач. Однако каждый год очень много абитуриентов на письменном экзамене по математике просто не приступают к решению стереометрических задач, видимо, считая, что их заведомо невозможно решить.

Из ошибок, встречавшихся в работах поступающих, следует отметить частое непонимание того, что такое угол прямой с плоскостью. Так, в разобранной задаче за этот угол часто принимался $\angle BCA$.

Также часто при решении пользовались условием, что $\angle CB'A$ — прямой, хотя в общем случае это совсем не так.

В заключение предлагаем читателям журнала для самостоятельного решения еще один вариант письменной работы по математике, предлагавшийся на мехмате МГУ в 1970 году.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_2(1+\cos 4x) \leqslant 1+\log_{\sqrt{2}} \sin x$$

2. Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} |xy-2| = 6-x^2, \\ 2+3y^2 = 2xy. \end{cases}$$

3. Три гонщика (A, потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 минуту из одной точки кольцевого шоссе и движутся в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более двух минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через 3 минуты он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая окружность касается сторон AB, BC и CD. Найти AC.

5. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1. BD — высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

Замечания. В задаче 2 систему можно решать иначе: из первого уравнения выразить x через y и подставить во второе. Попробуйте такой метод решения.

Рисунок 3 симметричен, поэтому $BM_1 = M_2C$, что использовалось в решении задачи 4. Можно, однако, вывести это равенство из равенства соответствующих треугольников.

В задаче 5

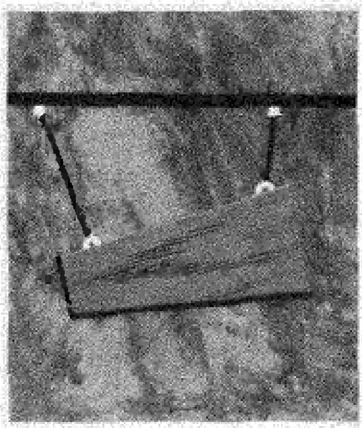
В решении задачи 5 знаки модуля в BO' поставлены потому, что точка B может лежать ниже, чем точка O'.

ВОПРОСЫ ПО ФИЗИКЕ

1. Хватит ли мощности гидроэлектростанции, чтобы испарить воду, проходящую через ее турбины?

2. Что стынет быстрее в одинаковых условиях: бульон или чай? Почему?

3. Конический стержень подвешен на легких нитях (см. рис. 1). Где находится его центр тяжести?



4. Два одинаковых удава начинают одновременно заглатывать друг друга с хвоста и делают это с постоянной скоростью, пока каждый из них не проглотит туловище другого полностью (но без головы). Нарисуйте схематически, чем все это кончится.

5. Кастрюля емкостью 2 л доверху наполнена водой. В нее ставят тонкостенную кастрюлю емкостью 1,5 л и массой 0,6 кг (рис. 2.). Сколько воды выльется?

6. Чистая вода прозрачна для света. Почему непрозрачен туман, представляющий собой мелкие капли воды?

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ В МОСКОВСКОМ АВТОДОРОЖНОМ ИНСТИТУТЕ

А. Н. Агеев, Ю. Г. Рудой

В этом году в Московском автодорожном институте впервые был проведен письменный экзамен по физике. Каждый билет состоял из теоретического вопроса по одному из разделов программы и четырех задач, подобранных так, чтобы охватить все разделы программы.

При ответе на теоретический вопрос и решении задач абитуриенты должны были показать как знание физических законов и умение применять их в той или иной конкретной физической ситуации, так и знание единиц измерений физических величин и корректность в вычислениях. Поэтому все задачи требовалось вначале решить в общем виде, а затем получить численный ответ.

Как показали экзамены, ответы на теоретический вопрос не вызывали затруднений и подавляющее большинство абитуриентов ответило на них хорошо. Задачи же давались, как правило, труднее.

Приведем для примера несколько задач, предлагавшихся в экзаменационных билетах и, рассказывая их решения, остановимся коротко на некоторых характерных ошибках поступающих. Для удобства мы разбили эти задачи по традиционным разделам.

В задачах по механике ошибки в основном были связаны с тем, что экзаменующиеся не всегда умели выделить все силы, управляющие движением, правильно определить их точку приложения и направление. Отсюда и неверно составленное уравнение движения. Например, в такой задаче.

З а д а ч а 1 (вариант № 26). Два тела с массами $m_1=50$ *г* и $m_2=100$ *г*, связанные невесомой нитью, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К первому телу приложена сила $F=300$ *Г*, направленная вдоль плоскости. Найти натяжение нити при движении тел. Изменится ли натяжение, если ту же силу приложить ко второй массе? Трением о поверхность пренебречь (рис. 1).

Ускорение системы в первом и во втором случае одинаково. Действительно, применяя 2-й закон Ньютона ко всей системе, получим:

в случае *а*) $F=(m_1+m_2)a_1$,

в случае *б*) $F=(m_1+m_2)a_2$.

Отсюда

$$a_1=a_2=a=\frac{F}{m_1+m_2}.$$

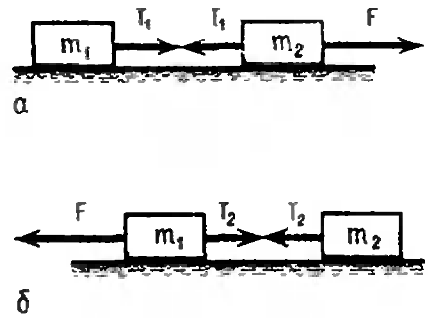


Рис. 1.

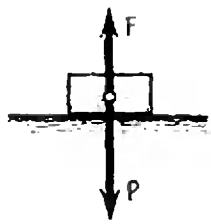


Рис. 2.

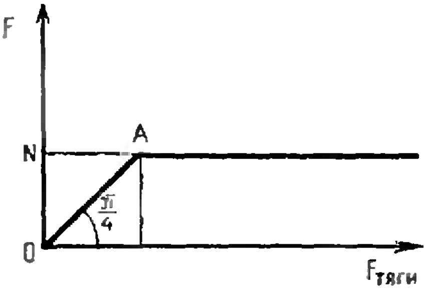


Рис. 3.

Натяжения нити, однако, различны: сила T_1 сообщает ускорение a телу с массой m_1, и поэтому

$$T_1 = m_1 a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot F = 100\ Г,$$

а сила T_2 сообщает это же ускорение телу с массой m_2, и поэтому

$$T_2 = m_2 a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot F = 200\ Г.$$

Много ошибок было и в такой задаче:

Задача 2 (вариант № 16). Груз с массой $m = 140$ *кг*, лежащий на полу кабины опускающегося лифта, давит на пол с силой $N = 147$ *кГ*. Определить величину и направление ускорения лифта.

Предположим, что ускорение направлено вверх (рис. 2). Тогда на основании 2-го закона Ньютона можем написать $F - P = ma$ (F — сила реакции опоры).

Отсюда

$$a = g\,\frac{F - P}{P}.$$

По 3-му закону Ньютона $F = N$. Поэтому

$$a = g\,\frac{N - P}{P} = 0{,}05g.$$

Итак, ускорение направлено вверх и равно $0{,}05\,g$.

Довольно большое число абитуриентов путает трение покоя и трение скольжения. Трение покоя всегда равно силе тяги, а трение скольжения равно kN, где N — сила нормального давления. Если к брусу, лежащему на горизонтальной поверхности, присоединить динамометр и медленно увеличивать силу тяги до тех пор, пока брусок не начнет скользить по поверхности, то зависимость силы трения от силы тяги будет графически изображаться так, как показано на рисунке 3. Точка A соответствует началу движения.

Много было ошибок, связанных с недостаточным знанием законов сохранения и неумением пользоваться этими чрезвычайно мощными методами решения задач.

В тех случаях, когда применение законов сохранения энергии и импульса позволяет получить простое и изящное решение, абитуриенты обычно выбирали сравнительно длинный путь решения, используя законы движения. Приведем для иллюстрации задачу из II тура олимпиады по физике, которая проводилась в МАДИ в 1970 году.

Задача 3. Шайба массы m движется горизонтально со скоростью v_0, попадает на платформу массы M и продолжает движение по ее поверхности с трением. Определить ско-

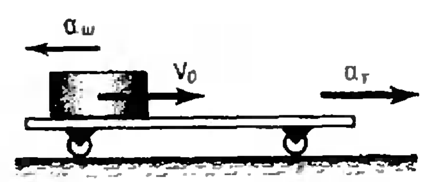


Рис 4.

рость платформы к тому моменту времени, когда шайба остановится на ней. Коэффициент трения между шайбой и платформой равен k. Платформа может катиться по рельсам без трения.

Решим сначала эту задачу, используя законы движения.

На шайбу и платформу в горизонтальном направлении действует сила трения, равная kmg, под действием которой платформа и шайба двигаются с ускорениями $a_{пл}$ и $a_ш$ относительно земли. Направления ускорений показаны на рисунке, а их величины определяются 2-м законом Ньютона:

$$ma_ш = kmg, \text{ и поэтому } a_ш = kg,$$

$$Ma_{пл} = kmg, \text{ и поэтому } a_{пл} = kg\frac{m}{M}.$$

Ускорение шайбы относительно платформы равно

$$\vec{a} = \vec{a}_ш - \vec{a}_{пл}, \text{ или } a = a_ш + a_{пл} = kg\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Так как скорость шайбы относительно платформы уменьшается со временем по закону $v = v_0 - at$, то $v = 0$ (то есть шайба остановится) через время

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{kg\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

К этому времени скорость платформы станет равной

$$v_{пл} = a_{пл}t = kg\frac{m}{M}\cdot\frac{v_0}{kg\left(1 + \frac{m}{M}\right)} = \frac{mv_0}{m + M}.$$

Значительно проще решается эта задача, если воспользоваться законом сохранения импульса. Действительно, сила трения между шайбой и платформой является внутренней силой, и, следовательно, она не может изменить общий импульс системы. В то же время внешние силы в горизонтальном направлении на систему платформа — шайба не действуют (напоминаем, что платформа катится по рельсам без трения). Приравнивая импульс системы в начальный момент, когда платформа еще покоится, ее импульсу в момент, когда шайба останавливается на платформе, получим

$$mv_0 = (m + M)v_{пл}.$$

Отсюда

$$v_{пл} = \frac{mv_0}{m + M}.$$

Много было ошибок при решении задач на газовые законы. Здесь абитуриенты довольно легко справлялись с теми задачами, для решения которых достаточно лишь формального знания законов, однако в тех случаях, когда для решения необходимо было как-то преобразовать запись законов или просто последовательно применить газовые законы для различных элементарных процессов, многие терялись. Приведем пример.

Задача 4 (вариант № 26). Газ сжат изотермически от объема $V_1 = 8$ л до объема $V_2 = 6$ л. Давление при этом возросло на $\Delta p = 4\cdot10^3\ \frac{н}{м^2}$. Каким было первоначальное давление?

Для решения достаточно записать закон Бойля — Мариотта в следующем виде:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_2} = \frac{P_2 - P_1}{P_1}. \text{ Отсюда}$$

$$P_1 = \Delta P\frac{V_2}{\Delta V} = 12\cdot10^3\ \frac{н}{м^2}.$$

Экзамены показали, что абитуриенты слабо знают диаграммные представления различных процессов. Поэтому мало кто верно решает задачи следующего типа.

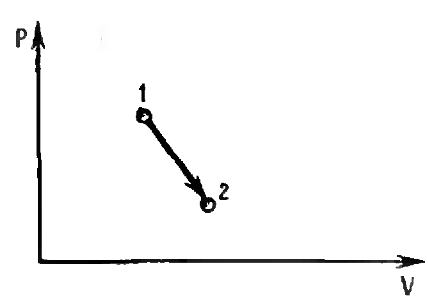


Рис. 5.

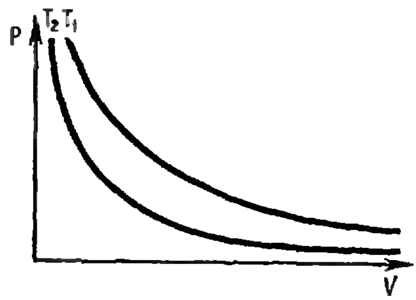


Рис. 6.

Задача 5 (вариант 38). На диаграмме PV (рис. 5) изображен процесс, в результате которого газ из состояния 1 перешел в состояние 2. Как при этом изменялась температура?

Две изотермы, соответствующие различным температурам T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), на диаграмме PV выглядят

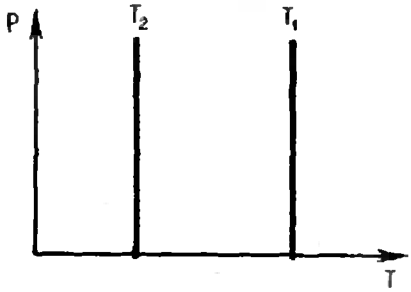


Рис. 7.

так, как показано на рисунке 6, а на диаграмме PT — так, как показано на рисунке 7.

Поэтому для решения задачи достаточно нанести на диаграмму сетку изотерм (рис. 8). Тогда становится очевидным, что температура газа уменьшилась ($T_1 > T_2$).

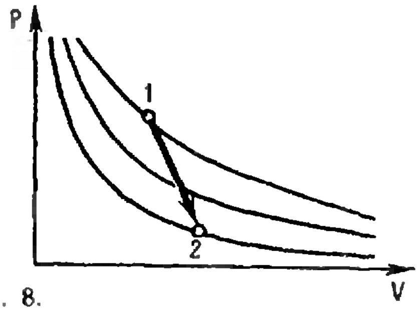


Рис. 8.

Вызывали затруднения задачи на составление уравнения теплового баланса в тех случаях, когда конечное состояние заранее не очевидно. Например, такая задача.

Задача 6 (вариант 17). Смешивают 300 *г* воды при температуре 10° С и 400 *г* льда, взятого при температуре — 20° С. Определить установившуюся температуру смеси.

$$c_в = 1\ \frac{кал}{г \cdot град},\ c_л = 0{,}5 \frac{кал}{г \cdot град},\ \lambda = 80\ \frac{кал}{г}.$$

Здесь конечное состояние не очевидно, и поэтому нельзя сразу написать уравнение теплового баланса. Такую задачу следует решать постепенно.

Подсчитаем вначале количество тепла, необходимое для нагревания льда до 0° С: $Q_1 = c_л m_л \Delta t$.

Затем найдем количество тепла, которое отдает вода, охлаждаясь до 0°С; $Q = c_в m_в \Delta t$. Сравним Q_1 и Q_2. В нашем случае $Q_1 = 4000$ *кал* и $Q_2 = 3000$ *кал*. Мы видим, что для того, чтобы нагреть весь лед до 0° С, недостает 1000 *кал*. Это количество тепла выделится при превращении m_x *г* воды в лед. Очевидно,

$$m_x = \frac{1000\ кал}{\lambda} = 12{,}5\ г.$$

Итак, в конечном состоянии при 0° С будет 412,5 *г* льда и 283,5 *г* воды.

При решении задач на электростатику наибольшее количество ошибок было связано с единицами измерения и с определением работы по перемещению заряда в поле другого точечного заряда или в поле заряженной сферы. Размерность таких величин, как заряд, напряженность, потенциал, довольно сложная, и поэтому они имеют условные наименования, такие, как единица заряда СГСЕ, единица потенциала СГСЕ и т. д. Кроме того, формулы электростатики сами содержат коэффициенты, различные в разных системах единиц. Поэтому при решении задач на электростатику нужно очень внимательно следить за единицами измерения, записать все данные задачи и формулы в какой-либо одной выбранной системе и только тогда проводить численные расчеты.

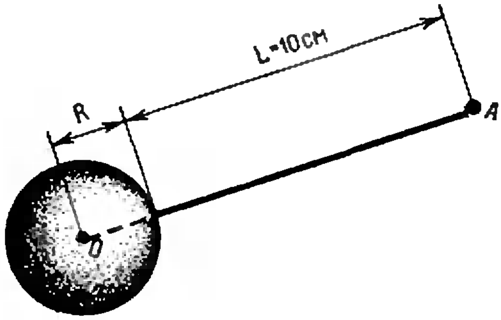


Рис. 9.

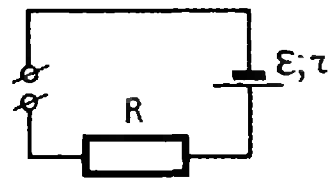


Рис. 10.

Ошибки в задачах на определение работы перемещения заряда в основном связаны с плохим пониманием физического смысла такой характеристики электрического поля, как потенциал. Многие пытались найти работу по формуле $A = F \cdot S$, тогда как в неоднородном поле сила, действующая на заряд, меняется при перемещении и пользоваться этой формулой нельзя. Для решения подобных задач необходимо применить понятие разности потенциалов. Приведем в качестве примера следующую задачу.

З а д а ч а 7 (вариант 24). Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд $q = 20$ ед. СГСЕ из бесконечности в точку A, находящуюся на расстоянии $L = 10$ *см* от поверхности металлического шарика (рис. 9)? Потенциал шарика равен φ_0 200 *в*, радиус шарика $R = 2$ *см*. Шарик находится в воздухе (рис. 11).

По определению потенциал в точке A равен численно работе по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку. Поэтому искомая работа $W = q \cdot \varphi_A$. Так как поле заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, равного заряду сферы и находящегося в центре сферы, то потенциал в точке A равен $\varphi_A = \frac{Q}{R+L}$. Далее, так как

$$\varphi_0 = \frac{Q}{R}, \quad \text{то} \quad \varphi_A = \varphi_0 \cdot \frac{R}{R+L} \quad \text{и}$$

$$W = q \cdot \varphi_A = q \cdot \varphi_0 \cdot \frac{R}{R+L} = 2{,}2 \text{ эрг.}$$

В разделе «Постоянный ток» наибольшее затруднение вызвали задачи на расчет цепи при зарядке аккумулятора. Рассмотрим, например, такую задачу.

З а д а ч а 8 (вариант 52). Аккумулятор, разряженный до 12 *в*, подключен для зарядки к сети с напряжением 15 *в* (рис. 10). Какое дополнительное сопротивление R нужно подключить в цепь для того, чтобы сила зарядного тока не превышала 1 *а*? Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 2$ *ом*.

В том случае, когда аккумулятор работает как источник тока и подключен на нагрузку R, ток определяется по закону Ома для полной цепи: $I_0 = \frac{E}{R+r}$. Внутри источника этот ток направлен от отрицательного электрода к положительному (рис. 10). При зарядке аккумулятора ток в нем имеет противоположное направление, то есть от положительного электрода к отрицательному. Если аккумулятор полностью разряжен, то зарядный ток определяется формулой $I_з = \frac{U_с}{R+r}$, где $U_с$ — напряжение сети.

В том случае, когда аккумулятор разряжен не полностью, как это имеет место в нашем случае, полный ток можно представить как разность $I = I_з - I_0 = \frac{U_с}{R+r} - \frac{E}{R+r}$, где E — значение э. д. с. разряженного аккумулятора.

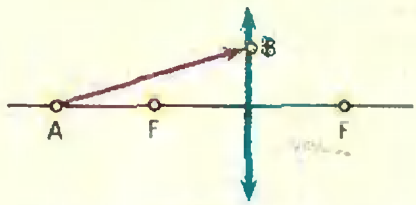


Рис. 11.

Таким образом, $U_c = I(R+r)+E$. Отсюда

$$R = \frac{U_c - E - Ir}{I} = 1 \text{ ом}.$$

В последнем разделе программы «Оптика», как правило, не решались задачи на построение изображения в линзах в тех случаях, когда требовалось воспользоваться понятием фокальной плоскости и побочного фокуса. Приведем примеры таких задач.

Задача 9 (вариант 78). Найти построением ход луча AB после собирающей линзы (рис. 11).

Проведем побочную оптическую ось, параллельную AB и пересекающую фокальную плоскость. Точка пересечения побочной оси с фокальной плоскостью (F') является побочным фокусом, в котором собираются все лучи, параллельные данной оси. Следовательно, луч AB после преломления линзой должен пройти через точку F' (рис. 12).

Аналогично решается такая же задача с рассеивающей линзой. Нужно только помнить, что фокусы в этом случае мнимые (рис. 13).

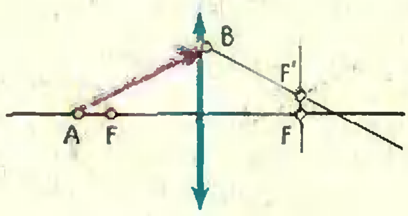


Рис. 12.

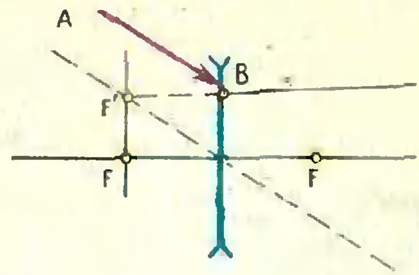


Рис. 13.

В заключение приведем один из вариантов билетов, которые предлагались на вступительных экзаменах.

Вариант 47

1. Магнитное взаимодействие проводников с током. Понятие о магнитном поле, индукции и силовых линиях (на примере прямого и кругового тока).

2. Автомобиль весом $P = 1$ т, развивающий мощность 60 *л. с.*, поднимается в гору со скоростью $v = 36$ *км/час*. Определить угол наклона горы α. Трение не учитывать.

3. В 480 *г* воды при 22° С бросили кусок льда при температуре −8° С. Чему равна температура смеси, если льда бросили 56 *г*? Уд. теплоемкость льда 0,5 *кал/г·град*, удельная теплота плавления 80 *кал/г*.

4. Какую скорость приобретает электрон, прошедший в электрическом однородном поле с напряженностью 0,01 единиц СГСЕ вдоль силовой линии расстояние 2 *см*?

5. Построить изображение отрезка AB в собирающей линзе (рис. 14).

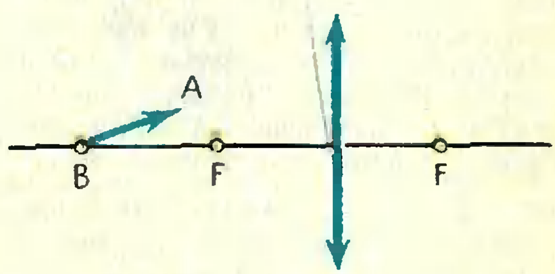


Рис. 14.

НОВОСТИ ФИЗИКИ

Новый тип радиоактивности — протонная радиоактивность

До сих пор было известно четыре типа радиоактивных распадов. β — распад происходит с излучением электронов (β^-- распад) или позитронов (β^+ распад); α — распад, происходящий с излучением α — частиц и γ — распад — излучение квантов света с большой энергией. Сюда можно еще добавить деление ядер (самопроизвольное — как говорят, спонтанное), открытое в 1940 году советскими физиками Флеровым и Петржаком, при котором тяжелое ядро (уран, плутоний и т. д.) разваливается на два.

В конце 1970 года был открыт еще один тип распада—протонная радиоактивность, существование которой было предсказано членом-корреспондентом АН СССР В. И. Гольданским. Протонная активность была открыта Черни с группой английских и американских физиков.

Протонно-активным оказался изотоп кобальта с массовым числом 53. Ядро этого изотопа содержит 27 протонов и 26 нейтронов. Распадающийся изотоп находится в возбужденном состоянии — его энергия примерно на 3 *Мэв* больше нормальной ($1 Мэв = 1$ миллион электрон вольт $= 1{,}6 \cdot 10^{-6} эрг = 1{,}6 \cdot 10^{-13} дж$).
^{53}Co распадается, превращаясь в изотоп железа с массовым числом 52:

$$^{53}Co \to {}^{52}Fe + \text{протон}$$

$^{53}Co^m$ (буква m означает, что кобальт возбужден и находится в метастабильном состоянии) живет в среднем около 0,3 секунды. Протонно активный изотоп кобальта получался в результате обстрела ядрами кислорода мишени из кальция:

$$^{40}Ca + {}^{16}O = {}^{53}Co^m + 2 \text{ нейтрона} + 1 \text{ протон}$$

и в результате обстрела протонами железа

$$^{54}Fe + p = {}^{53}Co^m + 2 \text{ нейтрона}$$

Энергия вылетающих протонов 1,6 *Мэв*.

Рецензии, библиография

Если вам нужно что-нибудь посчитать...

В наше время такая потребность может возникнуть довольно часто и далеко не всегда нужно обращаться при этом к помощи электронных вычислительных машин. Но если придется считать самим, то обязательно понадобятся таблицы.

Можно быть уверенным в том, что почти во всех случаях для вычислений будет достаточно пользоваться «Четырехзначными математическими таблицами» Л. С. Хренова, изданными в качестве пособия для учителей издательством «Просвещение» в 1967 году.

Кроме числовых таблиц автор дает краткую формулировку «Правил приближенных вычислений». В них приводятся основные определения, правила действий с приближенными числами и интерполирования, рекомендации относительно порядка выполнения вычислений. Как это ни сложно, но автору удалось здесь быть одновременно кратким, точным и ясным Так же хорошо написаны и «Пояснения к таблицам».

Основным содержанием книги являются четырехзначные таблицы основных элементарных функций, хорошо известных учащимся средней школы и часто встречающихся при вычислениях. В книге приводятся также небольшая таблица простых чисел, таблица биноминальных коэффициентов и представления несократимых дробей в виде десятичных.

Таблицы Л. С. Хренова можно вполне рекомендовать и как учебное пособие для школьников, и как пособие для массовых вычислений.

Р. С. Гутер

Чародей с Плуталовой улицы

Г. И. Мишкевич

Поэт математики, бард физики, герольд астрономии — таким по праву был Яков Исидорович Перельман. Его занимательные книги по математике (арифметике, алгебре, геометрии), физике (механике, акустике, оптике), астрономии и межпланетным путешествиям разошлись по всему миру миллионными тиражами. С именем Я. И. Перельмана связана целая эпоха русской и особенно советской научно-популярной литературы и того ее специфического направления, которое именуется занимательным.

Яков Исидорович Перельман родился в Белостоке в 1882 году. Его отец был счетоводом, мать — школьной учительницей.

Свою первую «занимательную» работу он опубликовал еще в 1899 году, будучи учеником белостокского реального училища. Это был очерк «По поводу ожидаемого огненного дождя», напечатанный в «Гродненских губернских ведомостях». В очерке в живой форме разоблачались вздорные измышления церковников о «предстоящем конце света». Уже в этой юношеской работе ясно видны задатки будущего талантливого популяризатора.

Я спрашивал Якова Исидоровича о том, как он стал популяризатором, и Перельман ответил так:

«Этим я обязан своим учителям и книгам. Они научили меня не только любить математику и физику, но и парадоксально мыслить. Я стал отыскивать занимательное начало повсюду, даже там, где его, казалось бы, и в помине не было».

Позднее Яков Исидорович в статье «К методике научной популяризации» пишет: «Находить в старом новое умеет не всякий, и далеко не всякий склонен глубоко задумываться над тем, что постоянно совершается перед глазами. Чтобы привлечь внимание к обыденным явлениям, надо показать в них новые, неожиданные стороны».

В другой статье — «Что такое занимательная наука» Перельман на первое место ставит удивление: «Мы рано перестаем удивляться, рано утрачиваем драгоценную способность, которая побуждает интересоваться вещами, не затрагивающими непосредственно нашего существования».

Я. И. Перельман в совершенстве владел искусством удивлять, умел заинтриговать, задеть читателя за живое. Он оживлял сухие догмы школьной премудрости, превращая их в увлекательнейший предмет.

В начале текущего столетия Я. И. Перельман переехал в Петербург и начал заниматься литературной деятельностью, одновременно учась в Петербургском лесном институте. Однако лесоводом он не стал. (Правда, в течение двух лет Перельман работал в «Особом совещании по топливу». Здесь он предложил перевести на час вперед стрелки часов, чтобы сберечь топливо для освещения. Это предложение получило силу закона.)

Когда Перельман учился в Лесном институте, на его математические способности обратил внимание профессор А. С. Домогаров. Он-то и привил своему студенту любовь к умению находить необычное в обычном.

Учась в Лесном институте, Яков Исидорович работал корректором у книгоиздателя П. П. Сойкина. Затем редактировал журналы «Природа и люди», «В мастерской природы», печатался в «Мире приключений». Статьи, подписанные «Я. Лесной», «П. Сильвестров», «Я. П.», все больше завоевывали симпатии читателей. Здесь, в книгоиздательстве Сойкина, Перельман начал серьезно заниматься проблемами занимательного изложения науки, в первую очередь физики. Основой такого изложения Яков Исидорович считал умение вызвать обостренный интерес к предмету. Только такой интерес сможет облегчить понимание и, следовательно, породить сознательное и прочное усвоение основ наук.

Первая книга Я. И. Перельмана — «Занимательная физика» — вышла в свет в 1913 году. И первым ее читателем и рецензентом стал знаменитый педагог-физик, профессор Петербургского университета Орест Данилович Хвольсон. Он пригласил Перельмана к себе на квартиру, и между ними произошел, как рассказывал Яков Исидорович, такой разговор:

— Вашу книгу я прочитал с удовольствием, она преотличная. Но среди физиков я не встречал вашей фамилии. Где вы изволили кончить курс?

— Я ученый лесовод, вот мой диплом...— смутился Перельман.

— Ну, вот что я вам скажу,— ответил Хвольсон — Лесоводов ученых у нас и без вас, что деревьев в лесу, а вот физиков, которые умели бы так писать, как вы, вовсе не имеется. Продолжайте сочинять подобные книги и впредь...

За «Занимательной физикой» последовала целая серия занимательных книг, написанных Яковом Исидоровичем. Да, Хвольсон нисколько не ошибся, отговорив Перельмана от занятий лесоводством.

Учителями Перельмана, формировавшими его искусство популяризатора, были также и книги. Он читал много, систематически и с хорошим педантизмом. Его педантизм выражался в том, что Яков Исидорович скрупулезно вел картотеку прочитанного и делал тысячи выписок. Я хорошо помню стеллажи с аккуратными коричневыми ящичками, заполненными карточками, исписанными каллиграфическим почерком. Стеллажи занимали целую стену в его обширном рабочем кабинете.

Яков Исидорович любил повторять афоризм Паскаля: «Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая делать его немного занимательным»—и он делал это с поразительным блеском. Не только в приложении к математике, но и к обширному классу физических наук.

Перечитывая А. П. Чехова (уже со своих «занимательных» позиций), Перельман отыскивает в рассказе «Репетитор» задачу, которую купец Удодов решил вмиг на конторских счетах — гораздо быстрее, чем это сделал репетитор его сына. Яков Исидорович остроумно и увлекательно вскрывает математическую суть купеческого способа решения задачи. Рассказ Л. Н. Толстого «Как в городе Париже починили дом» дает Перельману повод комментировать явление теплового расширения металлов. В «Сценах из рыцарских времен» А. С. Пушкина мечтатель Бертольд надеется открыть «вечное движение». Перельман вводит в свою «Занимательную физику» пушкинский текст с соответствующим научным толкованием.

Произведения Перельмана населены героями романов, повестей, рассказов, очерков — от сервантесовского Дон-Кихота до советского парашютиста Кайтанова, мастера затяжных прыжков.

Я. И. Перельман подвергает анализу научно-фантастические произведения таких королей этого жанра, как Жюль Верн и Герберт Уэллс. Нисколько не умаляя сюжетных и литературных достоинств, Яков Исидорович показывает, на какой научной «ниточке» держится все произведение. Первого августа 1934 года группа ленинградских писателей и ученых-популяризаторов встретилась в гостинице «Астория» с находившимся тогда в Ленинграде знаменитым английским писателем Гербертом Уэллсом.

В завязавшейся беседе Уэллс, между прочим, спросил:

Не вы ли тот самый Джекоб Перлман, который столь своеобразно интерпретировал мои произведения? Я читал вашу «Удивительную физику» — так она именуется в английском переводе.

— Тот самый,— улыбнувшись, ответил Перельман.

—... и который так ловко разоблачил моего «Человека-невидимку», указав, что он должен быть слеп, как новорожденный щенок... И мистера Кэйвора за изобретение вещества, якобы свободного от действия земного тяготения...

— Да, я писал об этом еще в 1915 году. Но ведь от этого ваши романы не стали хуже?

— А я, признаться, так тщательно старался скрыть эти уязвимые места от взоров читателя!

Его талант заключался в том, что он умел читать.

Сотни писем шли отовсюду на Плуталову улицу. Многим нужен был Яков Исидорович: рабочие ждали его в красных уголках цехов, чтобы послушать лекцию о космических путешествиях; школьники старались заполучить его в свои кружки занимательной науки; нужен он был и юристам как сведущее лицо, эксперт по вопросам, связанным с научным истолкованием какого-либо спорного факта. (Известен случай, когда Яков Исидорович выступал в суде по делу машиниста, обвинявшегося в халатности. Перельман объяснил и доказал суду, что машинист не виновен — причиной наезда было неправильное формирование состава.)

Яков Исидорович охотно делился своими знаниями. Не жалея сил, он терпеливо «откапывал» повсюду способных людей. На редкость точно и метко сказал о нем писатель Л. В. Успенский: «Бациллоноситель острейшего перельманита»!

В Николаеве Перельман отыскал инженера-технолога В. В. Рюмина, и на свет появился автор «Занимательной химии» и «Занимательной техники на стройке». В Москве был «обнаружен» профессор физики А. В. Цингер — страстный собиратель гербариев. Благодаря Перельману физик Цингер стал автором чудесной «Занимательной ботаники».

С легкой руки Перельмана выходят «Занимательная метеорология»

Д. О. Святского и Т. Н. Кладо, «Занимательное мироведение» В. О. Прянишникова, «Занимательная статистика» Е. Е. Святловского.

Появление «Занимательной минералогии» и «Занимательной геохимии» академика А. Е. Ферсмана, «Занимательной геологии» академика В. А. Обручева и «Занимательной географии» Л. В. Успенского также во многом обязано Перельману.

География, геология, геохимия, минералогия, статистика, метеорология, даже военное дело (имеется в виду книга полковника В. П. Внукова «Физика и оборона страны») втянуты в орбиту занимательной литературы.

В 1935 году Яков Исидорович с коллегами — В. А. Камским, А. Я. Малковым, В. О. Прянишниковым, Л. В. Успенским — основал знаменитый в Ленинграде Дом занимательной науки (ДЗН). Это была подлинная кунсткамера занимательных наук: физики, математики, астрономии, географии, геологии, метеорологии. В 1939 году в ДЗН насчитывалось более 100 крупных экспонатов, сгруппированных в четырех отделах: Астрономии, Географии (с залом Геологии), Математики, Физики (с залом Оптики). Кроме того, создавался отдел Электричества.

В этом доме все было занимательно, но все — строго обоснованно. Переходя из зала в зал, от экспоната к экспонату, посетитель убеждался в том, что простые, набившие оскомину школьно-азбучные истины не так уж просты. Здесь людей учили видеть в заурядном занимательное, в скучном — захватывающе интересное.

Вот, к примеру, «Доска Гальтона». Это был совсем нехитрый экспонат — наклонная доска, утыканная стальными иглами-шпеньками. В воронку насыпали пшено. Ударяясь о набитые иглы, крупинки укладывались на наклонной доске, очерчивая всегда одну и ту же кривую линию.

Так демонстрировался математический закон нормального распределения — закон Гаусса. Гаусс и... пшено!

ДЗН не был культурно-просветительной «забегаловкой». Занимательность была там не самоцелью, а средством пропаганды науки.

В этот период своей деятельности Перельман активно сотрудничал с такими корифеями отечественной ракетной науки и техники, как К. Э. Циолковский, Ф. А. Цандер, С. П. Королев, Н. А. Рынин и другие. Он встречался с ними по работе в ЛенГИРДе, вел обширную переписку.

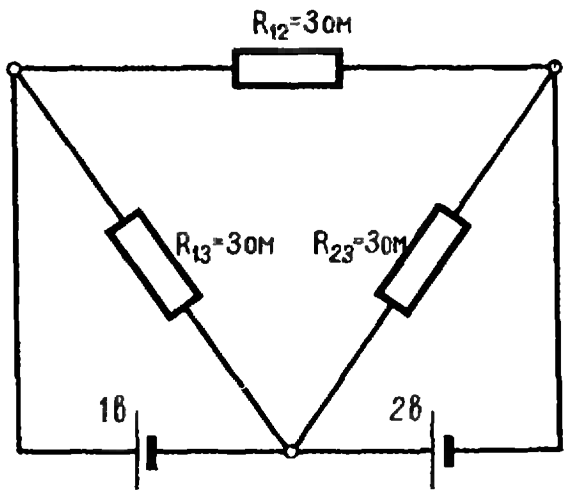
В память заслуг Якова Исидоровича Перельмана его именем назван один из кратеров на обратной стороне Луны, впервые сфотографированной советской автоматической межпланетной станцией «Луна-3» 7 октября 1959 года. Кратер Я. И. Перельмана имеет диаметр 95 километров и находится в точке с лунными координатами $\beta = +16°30'$ и $\lambda = -160°$.

На Луне имя Я. И. Перельмана увековечено... Обидно, что на Земле это не сделано. Плуталова улица, на которой жил Перельман, не стала улицей Перельмана, а на доме № 12 даже нет мемориальной доски. Не возрожден и Дом занимательной науки. ...

* * *

Мы попытались дать набросок портрета человека, имя которого широко известно во всем мире. Добавим, что Яков Исидорович Перельман был настоящим патриотом. Когда началась Великая Отечественная война, он отказался эвакуироваться из Ленинграда. В первые же недели войны на фронте погиб его единственный сын Михаил. От голода вскоре скончалась жена — врач. Третьего апреля 1942 года Яков Исидорович Перельман умер от истощения в блокированном Ленинграде.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ



К статье «Преобразование электрических цепей»

1. Преобразуем «звезду» $r_1=r_2=r_3$ в треугольник (см. рис.). Нетрудно найти токи, идущие через сопротивления R_{12}, R_{13} и R_{23}: $I_{12}=\frac{1\,в+2\,в}{R_{12}}=1а$; $I_{13}=\frac{1}{3}\,а$; $I_{23}=\frac{2}{3}\,а$. Это означает, что через батарею E_1 течет ток $I_1=\frac{4}{3}\,а$, а через батарею E_2 — ток $I_2=\frac{5}{3}\,а$. Значит, через сопротивление r_3 в исходной схеме идет ток $I=\frac{1}{3}\,а$.

2. При разомкнутом ключе общая емкость системы конденсаторов равна $C_1=\frac{C}{2}+\frac{C\cdot 2C}{3C}=\frac{7}{6}C$. При замкнутом ключе она равна $C_2=\frac{13}{11}C$. Поэтому

$$\Delta Q=E(C_2-C_1)=EC\left(\frac{13}{11}-\frac{7}{6}\right)=\frac{1}{66}EC.$$

К статье «Нравится ли вам возиться с целыми числами?»

1. Рассмотрите эти уравнения по модулям: а) 4; б) 9; в) 8; г) 7.

2. Используйте, что любое такое число имеет остаток 1 при делении на 9.

3. Такое число делится на 3 и не делится на 9.

4. а) λ^{-1}; б) λ, поскольку $6\frac{2}{15}-1\frac{31}{45}=\frac{8}{9}\cdot 5$; в) λ^4.

5. $1+3+3^2+\ldots+3^n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}$, поэтому $\alpha_n=d_3\left(\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1},\ 0\right)=\lambda^{n+1}$. Поскольку $\lambda<1$, то эта последовательность стремится к 0.

Заметьте, что геометрическая прогрессия 1, 3, 3^2, ..., 3^n, ... является в смысле расстояния d_3 бесконечно убывающей: $d_3(3^{n+1},0)=\lambda^{n+1}$, поэтому не удивительно, что ее сумму можно найти по обычной формуле

$$1+3+3^2+\ldots=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}.$$

6. $4\frac{14}{81}=$ «*11,0112*»; $1\frac{41}{81}=$ «*1,1112*»;

$$d_3\left(4\frac{14}{81},\ 1\frac{41}{81}\right)=\lambda^{-1}.$$

7. $-1=$ «... *22222*»; $\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)+1=$ «... *11112*»; $\frac{2}{5}=$ «... *121012101211*» (можно воспользоваться тем, что $\frac{2}{5}=\frac{48}{1-81}+1$); $\frac{2}{45}=$ «... *1210121012,11*».

К статье «Показательные уравнения»

1. $x=9$.
2. $x=4$.
3. $x=3$.
4. $x=\frac{3}{2}$.
5. $x=\frac{\lg 45-\lg 17}{\lg 3-\lg 2}$.
6. $x=\frac{3}{2}$.
7. $x=2$.
8. $x_{1,2}=\frac{2\lg(9\pm\sqrt{72})}{\lg 3}$.
9. $x=\frac{3}{2}$.
10. $x=0$.
11. $x_1=\log_3(2+\sqrt{5})$; $x_2=\log_3\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Указание: обозначьте 3^x-3^{-x} через y и покажите, что $9^x+9^{-x}=y^2+2$.

12. $x=\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg(1+\sqrt{5})-\lg 2}$. Указа-

н и е: введите обозначение $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} -$

$- \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = y$ и проверьте, что $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{x}} -$

$- \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{x}} = y^3 + 3y.$

13. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

14. $x = \frac{\lg 3}{\lg 2 - \lg 7}$.

15. $x = 2$.

16. $x = 2$. Указание: приведите уравнение к виду $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1$.

17. $x = 2$.

18. $x = 3$.

19. $x = 4$.

20. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \lg 2}$. Указание: прологарифмируйте обе части уравнения по основанию 10.

21. $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\log_3 2 \pm \pm\sqrt{\log_3^2 2 - 4\log_3 \frac{56}{153}}\right)$. Указание: приведите уравнение к виду $3^{x^2} = 2^x \cdot \frac{153}{56}$ и прологарифмируйте обе части уравнения по основанию 3.

22. $x = \pm\sqrt{2}$.

23. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

24. $x_1 = 1$, $x_2 = 8$.

25. $x = 2$.

К статье «Письменный экзамен по математике на мехмате МГУ в 1970 году»

1. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где

$$x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x \neq \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots).$$

2. $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

$$x_2 = -\sqrt{6},\quad y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

3. 3 *мин*.

4. $AC = 2\sqrt{5}\, r$.

5. $SE = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{6}\sin\varphi}$.

К статье «Письменный экзамен по физике в Московском автодорожном институте»

Вариант № 47

2. $\sin\alpha = 0{,}3$.
3. $\theta = 12^\circ$ C.
4. $v = 1{,}5 \cdot 10^6$ *м/сек*.

К статье «Кинематика и связи» («Квант» № 2) *)

1. В точке A проекции скоростей цилиндра $v_{АЦ}$ и стержня v_{AC} на направление AO' ($AO' \perp OA$) совпадают. Значение v_{AC} равно $\omega \cdot OA = \omega \cdot r \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Заметим, что мгновенная ось вращения цилиндра проходит через точку B. Поэтому $v_{АЦ}$ направлена перпендикулярно AB и равна $\Omega \cdot AB$, где Ω — угловая скорость вращения цилиндра. Поскольку

$$\Omega = \frac{v}{r} \text{ и } AB = 2r\cos\frac{\alpha}{2}, \text{ получим}$$

$$v_{АЦ} = \frac{v}{r}\cdot 2r\cos\frac{\alpha}{2} = 2v\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Из условия равенства проекций имеем

$$v_{AC} = v_{АЦ}\cos\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$$

или

$$\omega r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2v\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\frac{\omega r}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\omega r}{1 - \cos\alpha}.$$

2. Поскольку длина AB неизменна, проектируя скорости концов шатуна на направление AB, получим ($v_A = \omega r$):

$$v\cos\alpha = \omega r\cos(\pi - \alpha - \beta),$$

или

$$v = \omega r\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}.$$

Воспользовавшись теоремой синусов

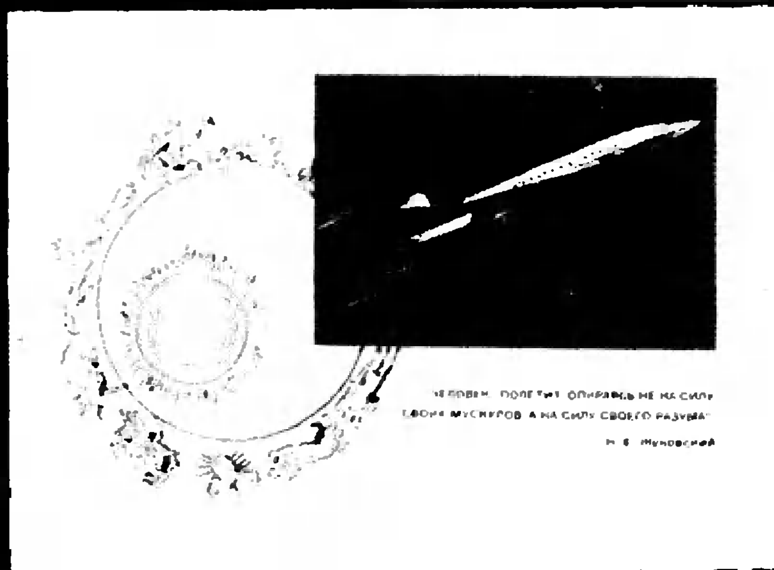
$$\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\sin\beta}{l},$$

можно найти

$$v = \omega r\left(\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{l}{r}\sin\alpha\right)^2} + \frac{l}{r}\sin\alpha\right) = \omega l\cdot\mathrm{tg}\,\alpha \times \left(\sqrt{\left(\frac{r}{l}\right)^2 - \sin^2\alpha} + \cos\alpha\right).$$

*) На рисунке к этой задаче в «Кванте» № 2 вектор скорости $v_{АЦ}$ должен быть направлен под углом $\frac{\alpha}{2}$ к стержню.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА



Марки, посвященные Н. Е. Жуковскому

Отец русской авиации — так Владимир Ильич Ленин назвал великого русского ученого, основоположника современной гидро- и аэромеханики Николая Егоровича Жуковского.

Ряд советских марок посвящен этому ученому.

Первая серия из трех марок, посвященная Н. Е. Жуковскому, вышла в 1941 году к 20-летию со дня его смерти. На первой марке этой серии (художник П. Платонов) воспроизведен портрет ученого, а внизу изображен винт самолета, так как Жуковский посвятил ряд своих работ изучению тяги винта.

На второй марке (художник Р. Поркшьян) воспроизведен портрет Н. Е. Жуковского на фоне военной академии, носящей его имя. На третьей марке серии (художник П. Платонов) изображен ученый и его формула для определения величины подъемной силы, опубликованная в 1906 году в работе «О присоединенных вихрях».

В январе 1947 года к 100-летию со дня рождения Н. Е. Жуковского были выпущены две марки с его портретом (художник В. Завьялов).

В августе 1963 года выпускается серия марок, посвященная деятелям отечественной авиации. На одной из марок этой серии воспроизведен портрет Н. Е. Жуковского. По инициативе и под руководством Жуковского была сооружена одна из первых в мире аэродинамическая труба, и художник В. Пименов изобразил на марке рядом с портретом ученого аэродинамическую трубу в разрезе.

В своей речи «О воздухоплавании», произнесенной в 1898 году, то есть задолго до появления самолета, Жуковский говорил: «Человек не имеет крыльев и по отношению веса своего тела к весу мускулов в 72 раза слабее птицы..., но я думаю, что он полетит, опираясь не на силу своих мускулов, а на силу своего разума». Эти слова великого ученого приведены на почтовом блоке (художник А. Аксамит), на котором изображен первый в мире пассажирский сверхзвуковой самолет ТУ-144. Блок выпущен в декабре 1969 года в серии марок, посвященных развитию гражданской авиации.

Отдел ведет А. В. Алтыкис

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

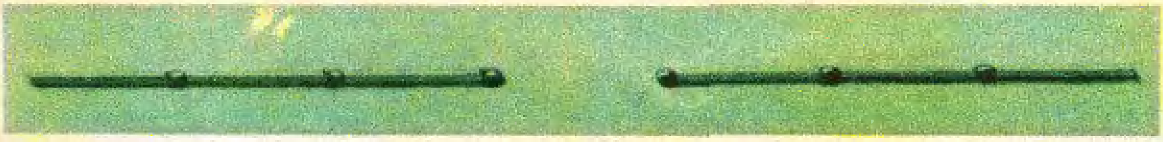


Рис. 1.

1. По дереву ползет гусеница. За день она поднимается на 6 метров, а ночью опускается на 4 метра. За сколько дней она доползет до вершины, если высота дерева 14 метров?

2. Из 15 монет, одинаковых с виду, одна фальшивая. Неизвестно, тяжелее или легче она остальных. Как это узнать, сделав не более двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

3. Числа *** 9 и 9 *** являются кубами целых чисел. Каких?

4. Шесть спичек лежат на столе так, как показано на рисунке 1. Требуется поменять их местами, придерживаясь следующих правил: спичку можно перемещать лишь в направлении ее головки на свободное место, либо просто передвигая, либо перепрыгивая не более чем через одну спичку.

5. Дан квадратный лист бумаги. Как рассечь его прямыми на четыре части (рис. 2), чтобы из них можно было сложить треугольную пирамиду, никакие ребра которой не равны (рис. 3)?

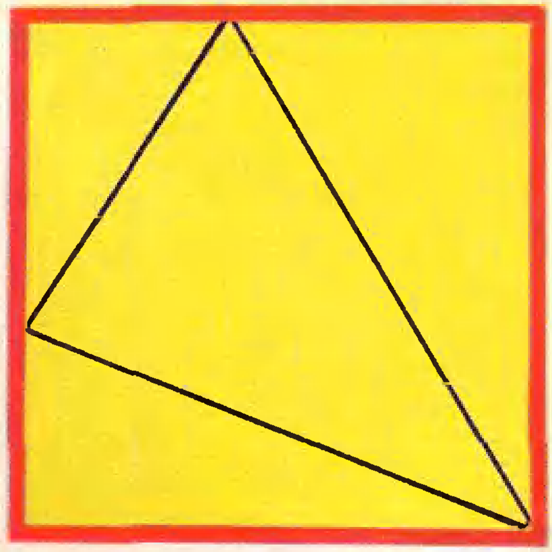


Рис. 2.

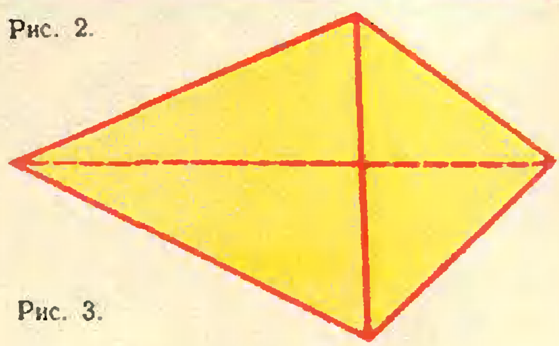


Рис. 3.

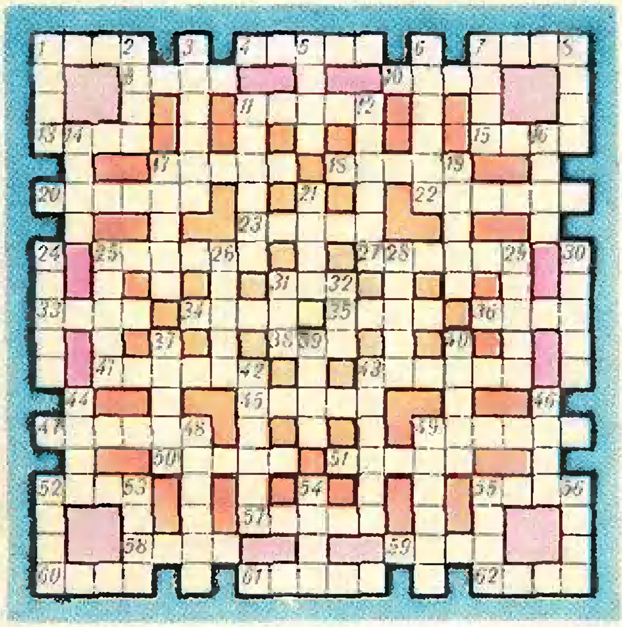
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Технический редактор Г. Н. Дьяченко
Корректор М. Л. Медведская
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 24/XI 1970 г.
Подписано в печать 28/I 1971 г.
Бумага $70 \times 100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Усл.-печ. л. 5,20. Уч.-изд. л. 5,54. Тир. 283 700.
Т-02151
Цена 30 коп. Заказ 1993.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов, Московской обл.

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

27/1-42

КВАНТ 3



Ответ на кроссворд, опубликованный в № 2

По горизонтали:

5. Слово. 8. Створ. 11. Качели. 12. Вериго. 13. Искра. 14. Люмен. 15. Гало. 19. Небо. 21. Даль. 22. Маятник. 23. Пара. 26. Поворот. 27. Граница. 28. Подстановка. 33. Масштаб. 35. Условие. 36. Спор. 38. Архимед. 39. Знак. 41. Блок. 44. Трап. 45. Бурав. 46. Ангар. 48. Стрела. 49. Рутиня. 50. Изгиб. 51. Склад.

По вертикали:

1. Начала. 2. Если. 3. Крен. 4. Пример. 6. Лист. 7. Вариант. 9. Тьюринг. 10. Овен. 16. Адепт. 17. Олово. 18. Отображение. 19. Надир. 20. Банах. 24. Яркость. 25. Паскаль. 29. Смысл. 30. Исток. 31. Квант. 32. Сетка. 34. Бурбаки. 35. Учебник. 37. Подряд. 40. Арбитр. 42. Пуаз. 43. Фара. 45. Блик. 47. Руда.

КРОССВОРД

По горизонтали:

1. Характеристика переменного тока. 4. Локационная установка. 7. Единица радиоактивности. 9. Ледяная корка. 10. Французский математик. 11. Древнегреческий мудрец, открывший несколько геометрических теорем. 13. Целенаправленная деятельность. 15. Мера взаимодействия двух тел. 17. Ограничение степеней свободы. 18. Деятельная часть. 20. Тонкий слой. 22. Закрытое пространство. 23. Убеждение. 25. Геометрическое тело. 27. Произведение силы на проделанный путь. 31. Движение электронов. 33. Повторяющийся этап процесса. 34. Часть суток. 35. Минерал. 36. Стадия в развитии. 38. Бесконечная сумма. 41. Светило. 43. Допустимое отклонение. 45. Выдающийся французский математик XVIII — XIX столетий. 47. Немецкий математик, плодотворно работавший в области теории чисел. 49. Очертание. 50. Условия работы механизма. 51. Один из основателей теории логарифмов. 52. Развитие. 55. Замкнутая выпуклая линия. 57. Указание. 58. Отверстие для света. 59. Измерительный прибор. 60. Балка. 61. Квант света. 62. Движение газа в дымоходе.

По вертикали:

1. Событие, действительно происшедшее. 2. Электрод. 3. Остов. 5. Дробная часть. 6. Предмет науки гляциологии. 7. Направление движения. 8. Колющий предмет. 11. Точная наука. 12. Часть круга. 14. Переключатель. 15. Созвездие. 17. Звук, сопровождающий трение. 19. Вид тележки. 21. Предмет в пространстве. 24. Описание морских берегов и течений. 25. Демонстрация экспоната. 26. Система правил. 28. Французский физик и астроном XIX столетия. 29. Международный детский лагерь. 30. Часть реактивного двигателя. 31. Геометрическое тело. 32. Список условных обозначений. 37. Тройка координатных векторов. 39. Часть атома. 40. Усилитель звука. 42. Вспомогательная часть слова. 43. Изъян. 44. Физик, впервые применивший маятник для доказательства вращения Земли. 46. Отрезок линии. 48. Упругое вещество. 49. Один из основателей небесной механики. 52. Единица деления картушки компаса. 53. Канат. 54. Совокупность лучей видимого спектра. 55. Эксперимент. 56. Увеличительное стекло.